

**КУРС ЛЕКЦИЙ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
для специальности**

**6-05-0533-09 «Прикладная математика»  
профилизация «Вероятность, статистика и анализ данных»**

**Тема 1. Методы решения нелинейных уравнений и их систем**

**Лекция 1. Решение нелинейных уравнений. Общая постановка задачи (3ч. – 2ч. ЛК+1ч. ЛР)**

1. Постановка задачи, основные определения, общие замечания. Задачи, приводящие к трансцендентным уравнениям.

2. Локализация корней нелинейного уравнения. Поиск всех корней алгебраического уравнения.

3. Методы уточнения корня – метод бисекции (половинного деления), метод простой итерации. Достаточное условие сходимости метода простой итерации. Приведение к виду, удобному для применения метода. Априорные и апостериорные оценки погрешности методов.

4. Геометрическая интерпретация рассмотренных методов.

Одной из важных задач прикладной математики является задача решения нелинейных уравнений, встречающихся в разных областях научных исследований. Обычно нелинейные уравнения делят на трансцендентные и алгебраические.

Под нелинейными уравнениями понимаются алгебраические и трансцендентные уравнения с одним неизвестным в следующем виде

$$f(x) = 0, \quad (1.1)$$

где  $x$  – действительное число,  $f(x)$  – заданная нелинейная функция.

**Алгебраическое уравнение** – это уравнение содержащие только алгебраические функции, которое можно представить многочленом  $n$ -ой степени с действительными коэффициентами (целые, рациональные, иррациональные) в следующем виде

$$y = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n.$$

**Трансцендентное уравнение** – это уравнение содержащие в своем составе функции, которые являются не алгебраическими. Простейшими примерами таких функций служат показательная функция, тригонометрическая функция, логарифмическая функция и т.д.

Так как оба типа нелинейных уравнений часто решаются одними и теми же методами, то далее рассматриваются методы, одинаково приспособленные для решения обоих типов.

Решением нелинейного уравнения называют совокупность (группу) чисел  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in R$ , которые, будучи подставлены на место неизвестной  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , обращают уравнение в тождество

$$f(\lambda) = 0.$$

Для решения нелинейных уравнений существует несколько методов: графические, аналитические и численные методы.

**Графические методы** наименее точны, но позволяют в сложных уравнениях определить наиболее приближенные значения, с которых в дальнейшем можно начинать находить более точные решения уравнений.

**Аналитические методы (или прямые методы)** позволяют определить точные значения решения уравнений. Данный метод позволяет записать корни в виде некоторого соотношения (формул). Подобные методы развиты для решения простейших тригонометрических, логарифмических, показательных, а также алгебраических уравнений. Однако подавляющее большинство нелинейных уравнений, встречающихся на практике, не удастся решить прямыми методами. В таких случаях обращаются к **численным методам**, позволяющим получить приближенное значение корня с любой заданной точностью  $\varepsilon$ .

**Численные методы** решения нелинейных уравнений – это итерационный процесс расчета, который состоит в последовательном уточнении начального приближения значений корней уравнения. При численном подходе задача о решении нелинейных уравнений разбивается на два этапа:

Требуется найти корни уравнения (1.1). Эта задача решается в два этапа:

- 1) отделение корней (локализация), т.е. определение отрезков  $[a, b]$ , в которых содержится только один корень уравнения;
- 2) уточнение корней – доведение их до заданной точности.

Под **локализацией корней** понимается процесс отыскания приближенного значения корня или нахождение таких отрезков, в пределах которых содержится единственное решение.

Под **уточнением корней** понимается процесс вычисления приближенных значений корней с заданной точностью по любому численному методу решения нелинейных уравнений.

Недостатком почти всех итерационных методов нахождения корней является то, что они при однократном применении позволяют найти лишь один корень функции, к тому же, мы не знаем какой именно. В случае повторения итерационного процесса при изменении стартовых точек отсутствуют гарантии, что найдется новый корень уравнения, так как итерационный процесс может сойтись к найденному корню.

**Отделение корней.** Для отделения корней полезна следующая теорема из математического анализа.

**Теорема 1.1. (Теорема о существовании корней)** Если непрерывная функция  $f(x)$  принимает значения разных знаков на концах отрезка  $[\alpha, \beta]$ , т.е.  $f(\alpha)f(\beta) < 0$ , то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения  $f(x) = 0$ , т.е. найдется хотя бы одно число  $\xi \in (\alpha, \beta)$  такое, что  $f(\xi) = 0$  (рисунок 1.1).

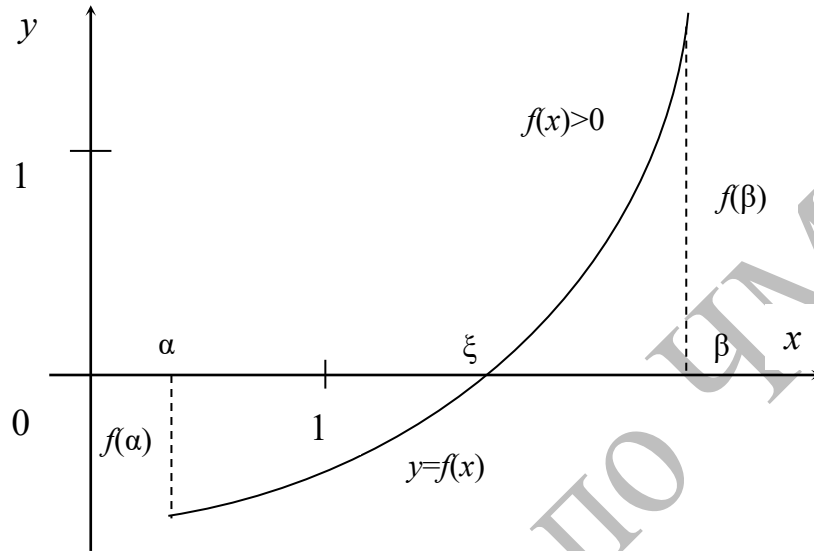


Рисунок 1.1 – Теорема о существовании корней

Корень  $\xi$  заведомо будет единственным, если производная  $f'(x)$  существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала  $(\alpha, \beta)$ , т.е. если  $f'(x) > 0$  (или  $f'(x) < 0$ ) при  $\alpha < x < \beta$  (рисунок 1.1).

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции  $f(x)$  в граничных точках  $x = a$  и  $x = b$  области её существования. Затем определяются знаки функции  $f(x)$  в ряде промежуточных точек  $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ , выбор которых учитывает особенности функции  $f(x)$ . Если окажется, что  $f(\alpha_k)f(\alpha_{k+1}) < 0$ , то в силу теоремы 1.1 в интервале  $(\alpha_k, \alpha_{k+1})$  имеется корень уравнения  $f(x) = 0$ . Нужно тем или иным способом убедиться, является ли этот корень единственным. Для отделения корней практически часто бывает достаточно провести процесс половинного деления, приближенно деля данный интервал  $(\alpha, \beta)$  на две, четыре, восемь и т.д. равных частей (до некоторого шага) и определяя знаки функции  $f(x)$  в точках делений.

Полезно помнить, что алгебраическое уравнение  $n$ -й степени

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

имеет не более  $n$  действительных корней. Поэтому, если для такого уравнения мы получили  $n$  переменну знаков, то все корни его отделены.

**Аналитический метод отделения корней.** Аналитически корень уравнения можно определить, используя некоторые свойства функции, изучаемы в курсе математического анализа. Если в уравнении (1.1) функция  $y = f(x)$  непрерывная, то следует воспользоваться следующими известными фактами:

1 – Если на концах некоторого отрезка непрерывная функция принимает значения разных знаков, то на этом отрезке уравнение (1.1) имеет, по крайней мере, один корень.

2 – Если при этом функция имеет первую производную, не меняющую знака, то корень будет единственным.

3 – Пусть аналитическая функция  $y = f(x)$  на концах  $[a, b]$  принимает значения разных знаков, т.е.  $f(a)f(b) < 0$ , то между  $a$  и  $b$  имеется нечетное число корней уравнения (1.1); если же на концах  $[a, b]$  функция принимает значения одинаковых знаков, т.е.  $f(a)f(b) > 0$ , то между  $a$  и  $b$  или нет корней, или их имеется четное число (с учетом кратности);

Для непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$  можно предложить следующий порядок действий для отделения корней аналитическим методом:

1. Найти  $f'(x)$  и определить критические точки.
2. Составить таблицу знаков функции  $f(x)$ , полагая  $x$  равным:
  - а) критическим значениям производных или ближайшим к ним;
  - б) граничным значениям области допустимых значений неизвестных.
3. Отделить интервалы, на концах которых функция принимает значения разных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному корню.

**Пример 1.1.** Отделить корни уравнения  $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$ .

**Решение.** Составляем приближительную схему

$x$	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$sign f(x)$	-	-	+	+	-	+	+

Из этой схемы видно, что рассматриваемое уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах  $(-3, -1)$ ,  $(0, 1)$  и  $(1, 3)$ , т.к. из таблицы видно, что имеет место три смены знаков функции. Обычно при отделении корней выделяют интервал длиной равной единице, т.е.

$x$	$-\infty$	-3	-2	0	1	2	3	$+\infty$
$sign f(x)$	-	-	+	+	-	-	+	

Т.о., рассматриваемое уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах длиной равной единице  $(-3, -2)$ ,  $(0, 1)$  и  $(2, 3)$ .

**Графический метод отделения корней.** Для графического метода отделения корней существует два способа:

1. Строим график функции  $y = f(x)$  (рисунок 1.2).

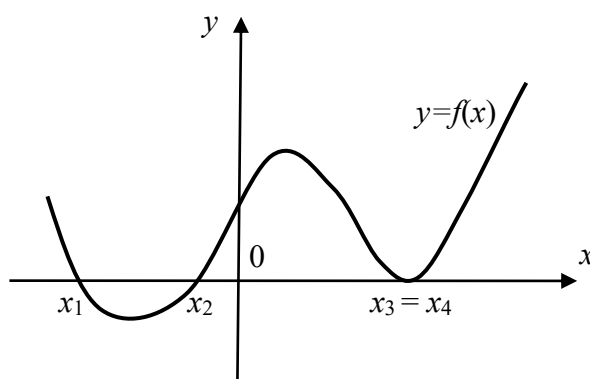


Рисунок 1.2 – Первый способ отделения корней. График функции  $y = f(x)$

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью  $Ox$  будут грубыми значениями корней уравнения (1.1). За окрестности корней принимаются интервалы, внутри которых находится единственный корень.

2. Представим функцию  $f(x)$  в виде  $f(x) = \phi(x) - \psi(x)$ , где функции  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  имеют более простой вид, чем функция  $f(x)$ . Построим графики функций  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$ . Абсциссы точек пересечения этих графиков будут приближенными значениями корней. Затем выделяют интервалы внутри, которых находится только один корень.

**Пример 1.2.** Отделить корни уравнения  $x - e^{-x} = 0$ .

**Решение.** Пусть  $\phi(x) = x$ ,  $\psi(x) = e^{-x}$ . Строим графики этих функций, рисунок 1.3.

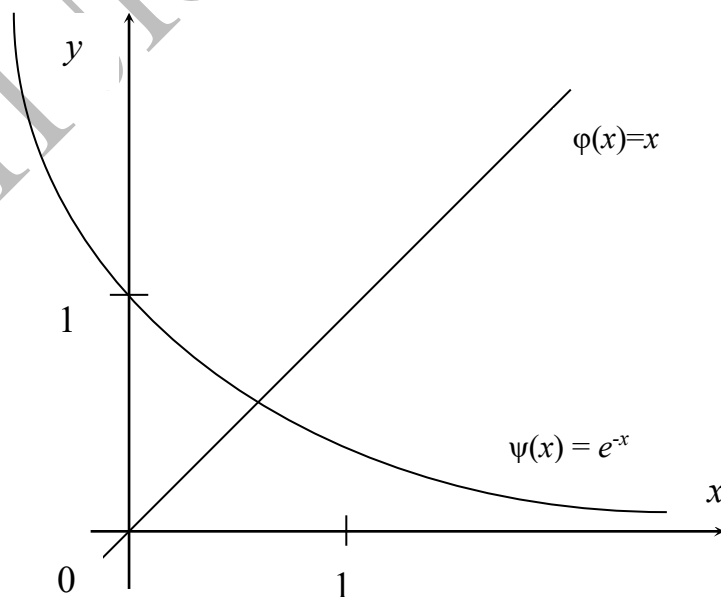


Рисунок 1.3 – Второй способ отделения корней. Графики функций  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$

Из графиков построенных функций следует, что корень уравнения находится на отрезке  $[0,1]$ .

**Определение числа действительных корней.** Пусть дано алгебраическое уравнение  $n$  степени

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (1.2)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – действительные коэффициенты.

Определить приближенно **число** действительных корней уравнения (1.2) можно с помощью **правила Декарта**: число положительных корней уравнения (1.2) с учетом их кратностей равно числу перемен знаков в последовательности коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$  (причем равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число. Для определения числа отрицательных корней достаточно применить правило Декарта к многочлену  $f(-x)$ .

Более точно число корней уравнения (1.2) можно определить, **используя теорему Штурма**: Пусть уравнение (1.2) не имеет кратных корней на некотором отрезке  $[a, b]$ . Обозначим через  $f_1(x)$  производную  $f'(x)$ ; через  $f_2(x)$  остаток от деления  $f(x)$  на  $f_1(x)$ , взятый с обратным знаком; через  $f_3(x)$  остаток от деления  $f_1(x)$  на  $f_2(x)$ , взятый с обратным знаком; и т.д. до тех пор, пока не получим  $f_n(x) = \text{const}$ . Получился так называемый ряд Штурма

$$f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x). \quad (1.3)$$

Число действительных корней уравнения (1.2), расположенных на отрезке  $[a, b]$ , равно разности между числом перемен знаков в последовательности (1.3) при  $x = a$  и числом перемен знаков в последовательности (1.3) при  $x = b$ .

**Практическое применение** теоремы Штурма сводится к следующему: определяются границы отрезка, на котором расположены действительные корни уравнения (1.2) и их число. Полученный отрезок  $[a, b]$  делится на некоторое число частей точками  $\alpha_i$ :  $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = b$ . Рассматривая отрезок  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  по теореме Штурма, определяется число корней на этом отрезке. Если окажется, что их больше одного, то этот отрезок делится пополам и теорема Штурма применяется к каждому полученному отрезку. Процесс продолжается до тех пор, пока на каждой части отрезка  $[a, b]$  уравнение (1.2) будет иметь не больше одного действительного корня.

Итак, в вычислительной практике обычно используются следующие способы отделения корней:

1) средствами машинной графики: функция представляется на экране ВМ и приближенно определяются отрезки, которым принадлежат точки  $x_i$  (рисунок 1.2);

2) средствами математического анализа с помощью исследования функций и построения графиков;

3) формированием простых функций и таких, что получается равносильное уравнение в виде  $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ , и дальнейшим построением графиков этих функций (рисунок 1.3).

**Методы уточнения корней.** На данном этапе задача состоит в получении приближенного значения корня, принадлежащего отрезку  $[a, b]$ , с заданной точностью (погрешностью)  $\varepsilon$ . Это означает, что вычисленное значение корня  $\tilde{x}$  должно отличаться от точного  $x^*$  не более чем на величину  $\varepsilon$ , т.е.  $|x^* - \tilde{x}| \leq \varepsilon$ .

Существует большое количество численных методов решения нелинейных уравнений для уточнения корней:

- метод половинного деления;
- метод хорд;
- метод простой итерации;
- метод Ньютона;
- метод парабол (Метод Мюллера);
- метод Ридерса;
- метод Дэккера и Брэнта;
- метод Лобачевского.

Все методы уточнения основаны на последующем приближении.

**Метод половинного деления.** Метод половинного деления – это численный метод решения уравнений, который основан на принципе деления отрезка пополам.

Для применения метода половинного деления необходимо, чтобы функция была непрерывной на заданном отрезке и имела разные знаки на концах этого отрезка. Также требуется, чтобы функция была монотонной на этом отрезке.

Алгоритм метода половинного деления следующий:

- 1) Выбирается начальный отрезок  $[a, b]$ , на котором функция имеет разные знаки.
- 2) Вычисляется середина отрезка:  $c = (a + b) / 2$ .
- 3) Вычисляется значение функции в середине отрезка:  $f(c)$ .
- 4) Если  $f(c)$  близко к нулю, то  $c$  является приближенным корнем уравнения.
- 5) Если  $f(c)$  имеет тот же знак, что и  $f(a)$ , то новым отрезком становится  $[c, b]$ .
- 6) Если  $f(c)$  имеет тот же знак, что и  $f(b)$ , то новым отрезком становится  $[a, c]$ .
- 7) Шаги 2-6 повторяются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность  $\varepsilon$  или максимальное количество итераций.

Метод половинного деления гарантирует сходимость к корню уравнения, но скорость сходимости может быть медленной. Однако, метод прост в реализации и обладает простыми условиями применимости.

**Метод итераций.** Метод простой итерации – это численный метод решения уравнений, основанный на преобразовании исходного уравнения в эквивалентное уравнение, в котором корень представлен в виде неподвижной точки отображения.

Уравнение (1.1) заменяется равносильным ему уравнением

$$x = \varphi(x). \quad (1.4)$$

Допустим, нам известно некоторое начальное приближение  $x_0$ . Тогда, в простейшем методе итераций, все дальнейшие приближения строятся по формуле

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Если последовательность (1.5) сходится при некотором выборе начального приближения  $x_0$ , то существует предел  $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  и предполагая функцию  $\varphi(x)$  непрерывной, найдем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k-1}) \text{ или } \xi = \varphi(\xi).$$

Таким образом,  $\xi$  является корнем уравнения (1.4) и может быть вычислен по формуле (1.5) с любой степенью точности. Процесс (1.5) называется простой одношаговой итерацией.

Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим образом: построим на плоскости  $xOy$  графики функций  $y = x$  (биссектриса первого координатного угла) и  $y = \varphi(x)$ . Каждый действительный корень  $\xi$  уравнения (1.4) является абсциссой точки пересечения кривой  $y = \varphi(x)$  с прямой  $y = x$ . Следующие два рисунка поясняют сходящийся итерационный процесс (рисунки 1.4 – 1.5).

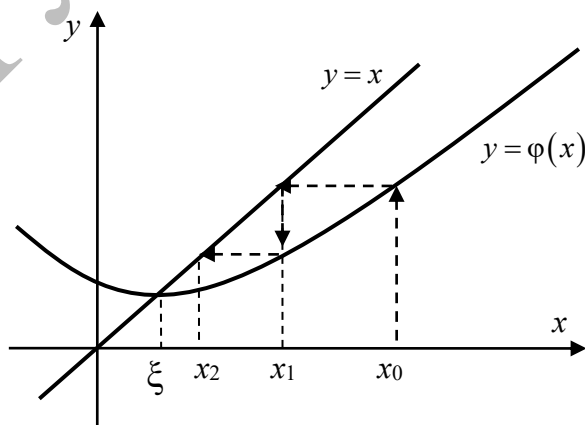


Рисунок 1.4 – Сходящийся процесс при  $0 < \varphi'(x) < 1$



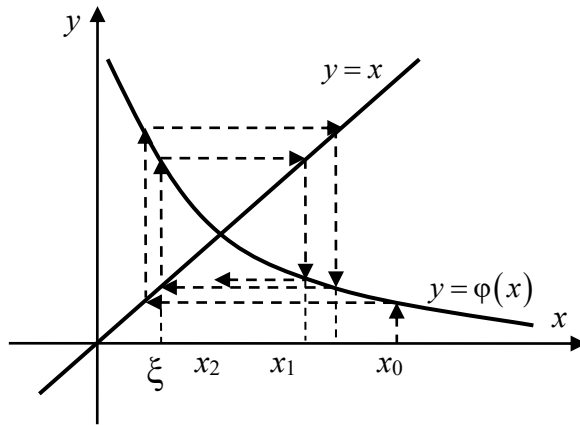


Рисунок 1.5 – Сходящийся процесс при  $\phi'(x) < 0$ , но  $|\phi'(x)| < 1$

На рисунках 1.6 и 1.7 схематично изображен расходящийся итерационный процесс. О динамике процесса можно проследить по стрелкам, имеющимся на рисунках.

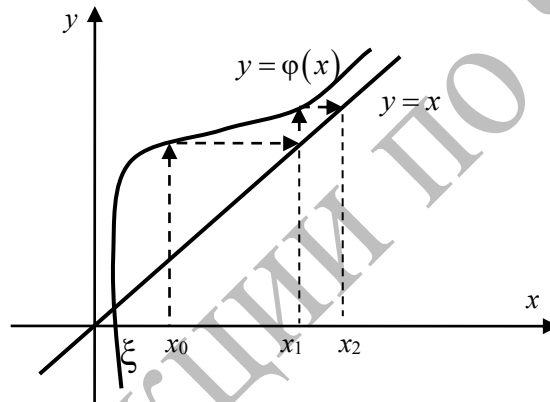


Рисунок 1.6 – Расходящийся процесс при  $\phi'(x) < 1$

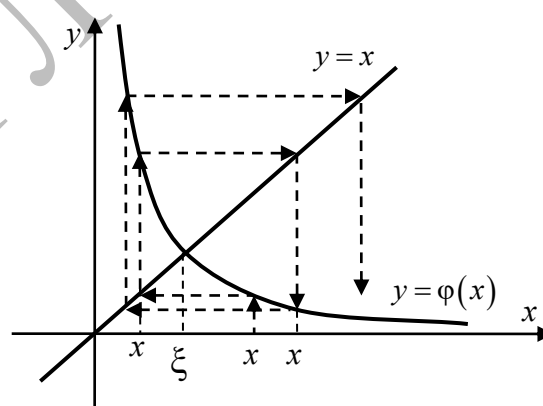


Рисунок 1.7 – Расходящийся процесс при  $|\phi'(x)| > 1$

Поэтому для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

**Теорема 1.2.** Пусть  $\phi(x)$  определена и дифференцируема на  $[a, b]$  и все её значения принадлежат отрезку  $[a, b]$ . Если существует такое  $q$ , что

$$|\phi'(x)| \leq q < 1, \quad (1.6)$$

то итерационный процесс (1.5) сходится к единственному корню на  $[a, b]$ .

Для скорости сходимости итерационного процесса, справедливы соотношения

$$|\xi - x_n| \leq q^n |\xi - x_0|, \quad (1.7)$$

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|, \quad (1.8)$$

$$|\xi - x_0| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (1.9)$$

Из (1.7) следует, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q$ . Формула (1.8) позволяет определить достаточное число итераций  $n$  при выбранном  $|x_1 - x_0|$ . На практике для оценки сходимости удобно пользоваться (1.9). Так, если  $\varepsilon > 0$ ,  $|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon$ , то корни уравнения определяются с точностью до  $\varepsilon$ .

Обычно для получения  $\phi(x)$  пользуются следующим способом приведения (1.1) к виду (1.4). Строят уравнение

$$x = x - \lambda f(x), \quad (1.10)$$

где  $\lambda$  – параметр. Пусть  $f'(x)$  постоянного знака на отрезке  $[a, b]$ . Для нахождения  $\lambda$  положим

$$\lambda = \begin{cases} \frac{k}{M_1}, & f'(x) > 0 \\ -\frac{k}{M_1}, & f'(x) < 0 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|,$$

В этом случае будет верно  $|\phi'(x)| < 1$ , значит итерационный процесс по формуле (1.10) будет сходящимся.

## Лекция 2. Решение нелинейных уравнений. Простейшие итерационные методы (3ч. – 2ч. ЛК+1ч. ЛР)

1. Метод Ньютона. Достоинства и недостатки метода Ньютона.
2. Другие итерационные методы (метод секущих, упрощенный метод Ньютона и др.).
3. Скорость сходимости итерационных методов решения нелинейных уравнений.
4. Геометрическая интерпретация рассмотренных методов.

**Метод Ньютона.** Метод Ньютона, также известный как метод касательных или метод Ньютона-Рафсона, является итерационным численным методом для нахождения приближенного значения корня уравнения. Метод Ньютона позволяет привести решение нелинейных уравнений к решению последовательности линейных задач. Достигается это при помощи выделения из нелинейного уравнения его главной линейной части.

Пусть корень уравнения (1.1) отделен на  $[a, b]$ , причем  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  непрерывны и сохраняют определенные знаки и  $f'(x)$  не обращается в нуль на  $[a, b]$ . Метод Ньютона заключается в том, что кривая уравнения  $y = f(x)$  заменяется касательной к ней. Имея  $n$ -ое приближение корня  $\xi \approx x_n \in [a, b]$ , уточним его по методу Ньютона следующим образом: положим

$$\xi = x_n + h_n, \quad (1.11)$$

где  $h_n$  считаем малой величиной. Теперь, применяя формулу Тейлора, получим

$$f(\xi) = 0 = f(x_n + h_n) = f(x_n) + h_n f'(x_n).$$

Откуда следует, что

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Внося эту поправку в формулу (1.11), найдем следующее приближение корня

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Геометрически метод Ньютона (1.12) эквивалентен замене небольшой дуги кривой  $y = f(x)$  касательной, проведенной в некоторой точке касания (рисунок 1.8).

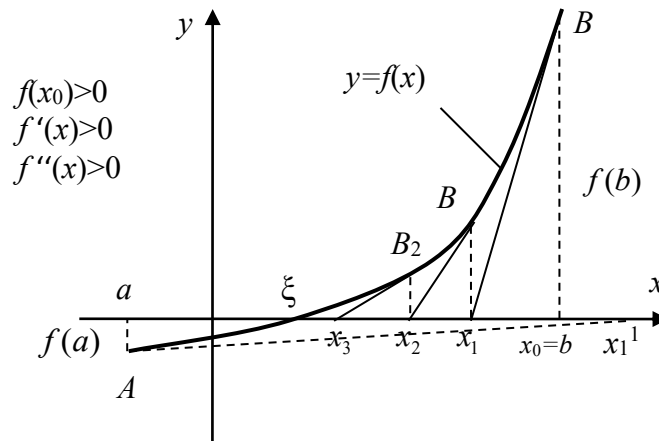


Рисунок 1.8 – Иллюстрация метода Ньютона

Если положить (рисунок 1.8)  $x_0 = a$  и, следовательно,  $f(x_0)f''(x_0) < 0$  то, проведя касательную к кривой  $y = f(x)$  в точке  $A(a, f(a))$ , получили бы точку  $x_1^1$ , лежащую **вне** отрезка  $[a, b]$ , и можем не прийти к корню  $\xi \approx x_n \in [a, b]$  уравнения (1.1). Поэтому за начальное приближение  $x_0$  в формуле (1.12) выбирается тот конец отрезка  $[a, b]$ , для которого знак функции совпадает со знаками второй производной, т. е.  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ .

**Теорема 1.3.** Если  $f(a)f(b) < 0$ , причем  $f'(x), f''(x)$  отличны от нуля и сохраняют определенные знаки при  $x \in [a, b]$ , удовлетворяющего неравенству  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ , то можно вычислить методом Ньютона по формуле (1.12) единственный корень  $\xi$  уравнения (1.1) с любой степенью точности.

Из формулы (1.12) видно, что чем больше численное значение производной  $f'(x)$  в окрестности данного корня, тем меньше поправка, которую нужно прибавить к  $n$ -му приближению, чтобы получить  $(n+1)$ -ое приближение. Поэтому метод Ньютона особенно удобно применять тогда, когда в окрестности данного корня график функции имеет большую крутизну. Но, если численное значение производной  $f'(x)$  вблизи корня мало, то поправки будут велики, и вычисление корня по этому методу может оказаться очень долгим, а иногда и вовсе невозможным. Следовательно, если кривая  $y = f(x)$  вблизи точки пересечения с осью  $Ox$  почти горизонтальна, то применять метод Ньютона для решения уравнения (1.1) не рекомендуется.

Для оценки погрешности  $n$ -го приближения  $x_n$  можно воспользоваться формулой

$$|\xi - x| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \quad (1.13)$$

или формулой

$$|\xi - x| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2, \quad (1.14)$$

где  $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ ,  $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ .

В общем случае совпадение с точностью до  $\varepsilon$  двух последовательных приближений  $x_n$  и  $x_{n+1}$  вовсе не гарантирует, что с той же точностью совпадает значение  $x_{n+1}$  и корень  $\xi$  (рисунок 1.9).

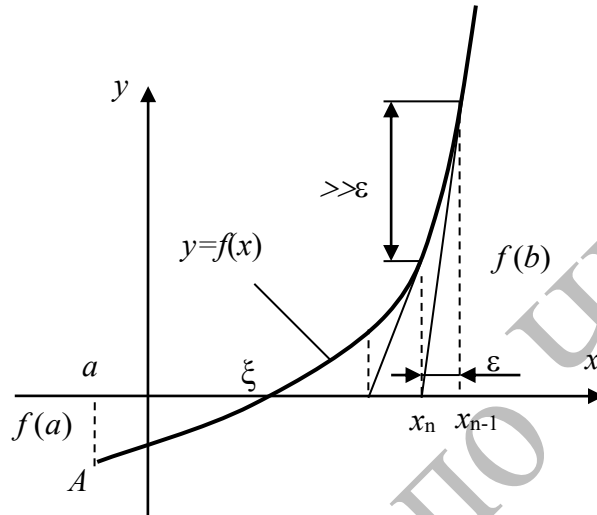


Рисунок 1.9 – О двух последовательных приближениях

Оценки (1.13), (1.14) указывают на квадратичную сходимость метода Ньютона. Поэтому если  $f'(x)$  мало меняется на  $[a, b]$ , то можно пользоваться видоизмененной формулой Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

В этом случае для получения требуемой точности в отличие от формулы (1.12) необходимо сделать лишь несколько дополнительных шагов.

**Метод Ньютона обладает следующими свойствами:**

- 1) Метод сходится к корню уравнения квадратично, что означает, что с каждой итерацией удваивается количество верных цифр в приближенном значении корня.
- 2) Метод может не сходиться, если начальное приближение выбрано неправильно или если производная функции равна нулю в точке приближения.
- 3) Метод может сходиться к локальному минимуму или максимуму функции, если начальное приближение выбрано близко к такой точке.

**Метод хорд.** Пусть дано уравнение (1.1) с непрерывными на отрезке  $[a, b]$  функцией  $f(x)$  и ее производными  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ . Корень считается отделённым на  $[a, b]$  и притом единственным.

Рассмотрим случай, когда  $f'(x), f''(x)$  – одного знака. Пусть для определенности  $f(a) < 0 < f(b)$ ,  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ , т.е.  $f'(x)f''(x) > 0$ . График функции  $y = f(x)$  проходит через точки  $A_0(a, f(a)), B(b, f(b))$  (рисунок 1.10).

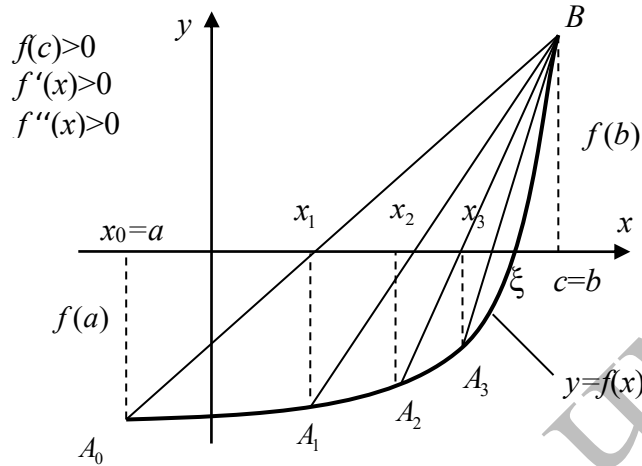


Рисунок 1.10 – Иллюстрация метода хорд  $f(c)f''(c) > 0$

Искомый корень  $\xi$  уравнения  $f(x) = 0$  – есть абсцисса пересечения графика  $y = f(x)$  с осью  $Ox$ . Эта точка нам известна, но вместо нее можно взять точку  $x$  – точку пересечения хорды  $A_0B$  с осью  $Ox$ . Это и будет первое приближение к корню  $\xi$ . Уравнение хорды, проходящей через две точки  $A_0$  и  $B$ , запишется

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Положив  $y = 0$ , найдем  $x = x_1$

$$x = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}.$$

Следовательно, последовательные приближения при этом можно вычислить по следующей итерационной формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)}. \quad (1.16)$$

В формуле (1.16) точка  $c$  является неподвижной и в качестве ее берется тот конец  $[a, b]$ , для которого выполняется условие  $f(c)f''(c) > 0$ , а за начальное приближение  $x_0$  выбирается противоположный конец  $[a, b]$ , так что  $f(x_0)f(c) < 0$  (в нашем случае  $c = b, x_0 = a$ ).

Описанный метод называется также **методом секущих** или **методом линейной интерполяции**. Последовательные приближения в методе хорд образуют – монотонную, ограниченную сверху или снизу корнем  $\xi$  последовательность. При этом справедлива оценка

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|, \quad (1.17)$$

где  $M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ ,  $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ . Оценка (1.17) позволяет на каждом шаге следить за достигнутой точностью.

При решении задачи на ЭВМ целесообразно отрезок  $[a, b]$  выбирать столь малым, чтобы выполнялось условие  $M_1 \leq 2m_1$ . В этом случае итерационный процесс сходится быстро.

Метод хорд (секущих) можно рассматривать, как метод итерации для эквивалентного уравнения

$$x = x - \frac{f(x)(x - c)}{f(x) - f(c)} = \varphi(x), \text{ где } f(c)f''(c) > 0.$$

Геометрически этот метод состоит в том, что значение  $x_{n+1}$  есть абсцисса точки пересечения прямой, проходящей через точки  $(x_0, f(x_0))$  и  $(x_n, f(x_n))$  с осью  $Ox$ . Графическая иллюстрация метода приведена на рисунках 1.11 – 1.13. Следует обратить внимание на то, как выбирается неподвижная точка.

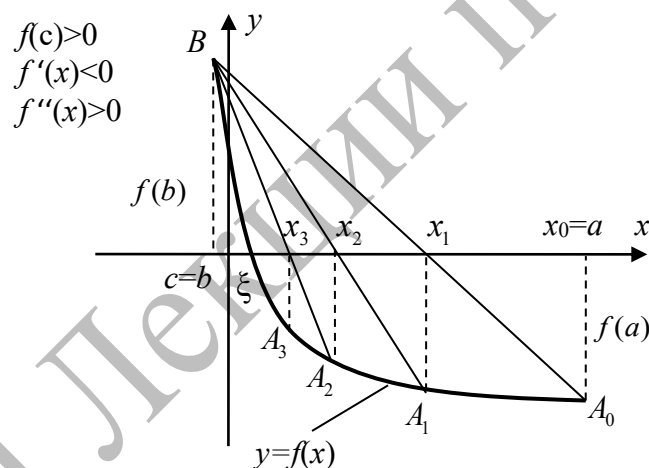


Рисунок 1.11 – Иллюстрация метода хорд  $f(c) > 0$ ,  $f'(c) < 0$

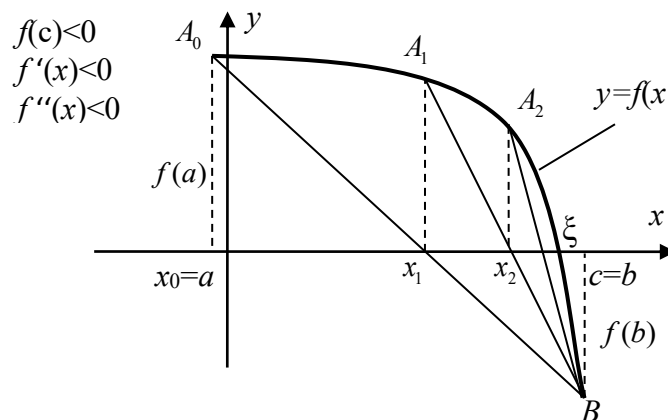


Рисунок 1.12 – Иллюстрация метода хорд  $f(c) < 0$ ,  $f'(c) < 0$

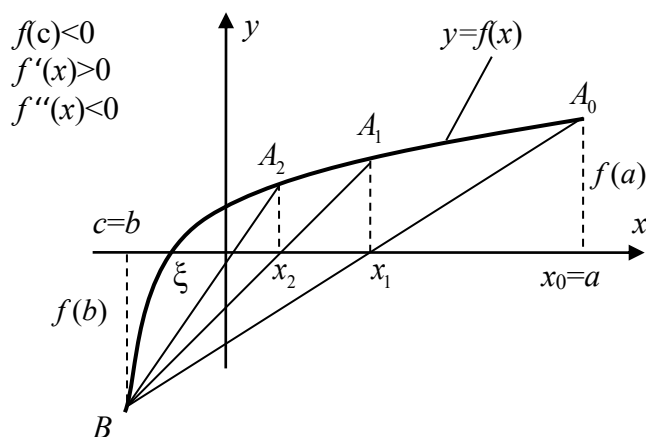


Рисунок 1.13 – Иллюстрация метода хорд  $f(c) < 0$ ,  $f'(c) > 0$

Из приведенного выше следует, что выбор неподвижной точки осуществляется следующим образом:

1 – неподвижен тот конец отрезка, для которого знак функции  $f(x)$  совпадает со знаком ее второй производной  $f''(x)$ .

2 – последовательные приближения  $x_n$  лежат по ту сторону корня  $\xi$ , где функция  $f(x)$  имеет знак, противоположный знаку ее второй производной  $f''(x)$ .

В обоих случаях каждое следующее приближение  $x_{n+1}$  ближе к корню  $\xi$ , чем предшествующее  $x_n$ .

Применение метода секущих позволяет приближенно найти корень функции, однако требует более аккуратного выбора начальных приближений и может быть менее устойчивым, чем метод Ньютона.

**Комбинированный метод.** Комбинируя метод секущих и метод Ньютона, получается нестационарный метод отыскания действительных корней уравнения (1.1). Преимущество получаемого метода заключается в том, что при прежних предположениях относительно  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  последовательные приближения  $x_n$  и  $x_{n+1}$  лежат по разные стороны от корня, и поэтому можно следить в процессе вычислений за достигнутой точностью. В то же время он сходится значительно быстрее метода секущих.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  содержится единственный корень уравнения (1.1), а  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  на этом отрезке не меняют знаков.

Если  $f(a)f''(a) > 0$ , то находим  $x_0$  и  $x_1$  по формулам

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}, \quad (1.18)$$

а следующие приближения находятся по формулам



$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}, x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}. \quad (1.19)$$

Если  $f(b)f''(b) > 0$ , то находим  $x_0$  и  $x_1$  по формулам

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}, \quad (1.20)$$

а следующие приближения находятся по формулам (1.19).

Геометрическая интерпретации комбинированного метода выглядит следующим образом:

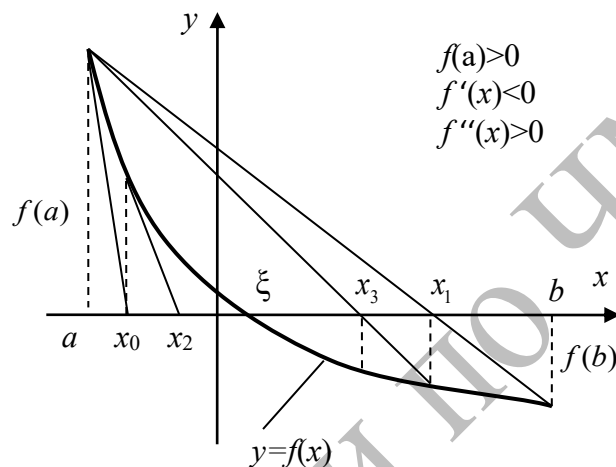


Рисунок 1.14 – Комбинированный метод  $f(a) > 0$ ,  $f'(x) < 0$

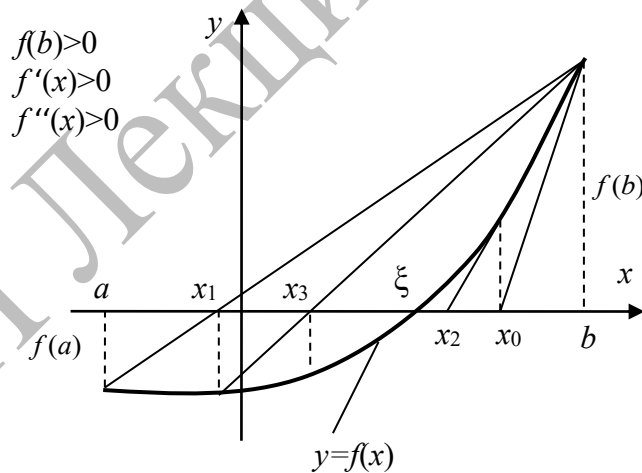


Рисунок 1.15 – Комбинированный метод  $f(b) > 0$ ,  $f'(x) > 0$

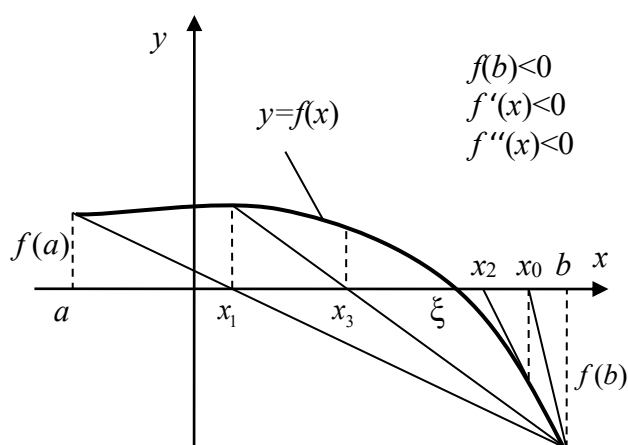


Рисунок 1.16 – Комбинированный метод  $f(b) < 0$ ,  $f'(x) < 0$

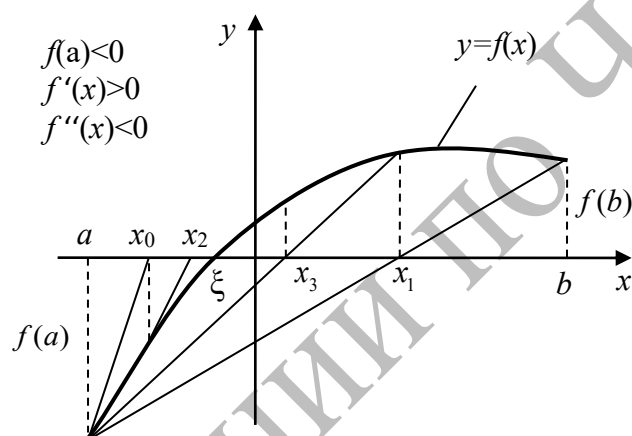


Рисунок 1.17 – Комбинированный метод  $f(a) < 0$ ,  $f'(x) > 0$

### Сравнение методов решения нелинейных уравнений

**Метод половинного деления.** Метод половинного деления основан на принципе деления отрезка пополам. Он применяется для нахождения корня уравнения на заданном отрезке. Основные свойства метода половинного деления:

- 1) Требуется, чтобы функция была непрерывной на заданном отрезке и имела разные знаки на концах отрезка.
- 2) Гарантирует сходимость к корню, но скорость сходимости может быть медленной.
- 3) Точность результата зависит от выбора начального отрезка и числа итераций.
- 4) Очень прост и имеет одно явное преимущество по сравнению со всеми рассмотренными выше методами – он всегда сходится. Однако, скорость сходимости очень мала, поэтому его часто используют для грубого уточнения корня.

**Метод Ньютона.** Метод Ньютона основан на использовании касательной к графику функции для приближенного нахождения корня уравнения. Основные свойства метода Ньютона:

- 1) Требуется, чтобы функция была дважды непрерывно дифференцируемой.
- 2) Обеспечивает быструю сходимость к корню, особенно если начальное приближение близко к корню.
- 3) Эффективен для решения уравнений, график которых в окрестности корня имеет большую крутизну. Метод обладает высокой скоростью сходимости, но его сходимость зависит от вида функции, поэтому рекомендуется отрезок, на котором отделяется корень, выбирать очень небольшой длины.
- 4) Может не сойтись, если начальное приближение далеко от корня или если функция имеет особенности, такие как вертикальные асимптоты или точки разрыва.

**Метод секущих.** Метод секущих является модификацией метода Ньютона и использует две точки на графике функции для приближенного нахождения корня уравнения. Основные свойства метода секущих:

- 1) Требуется, чтобы функция была непрерывной и имела разные знаки на концах отрезка.
- 2) Обеспечивает быструю сходимость к корню, особенно если начальные приближения близки к корню.
- 3) При правильном выборе неподвижной точки последовательность приближений гарантированно сходится к корню уравнения.
- 4) Может не сойтись, если начальные приближения далеко от корня или если функция имеет особенности, такие как вертикальные асимптоты или точки разрыва.

**Метод простой итерации.** Метод простой итерации основан на преобразовании исходного уравнения в эквивалентное уравнение, содержащее неподвижную точку. Основные свойства метода простой итерации:

- 1) Дает возможность «угадывать» новые значения  $x$  на любом шаге. Следовательно, если процесс сходится медленно, можно вносить коррективы, учитывая предыдущие результаты.
- 2) Метод прост и обладает хорошей сходимостью. Однако перед его использованием требуется преобразование исходного уравнения.
- 3) Может сойтись к корню с разной скоростью в зависимости от выбора функции.
- 4) Может не сойтись, если функция не обладает свойством сжимающего отображения.

В зависимости от конкретной задачи и свойств функции, один метод может быть более эффективным и точным, чем другие. Поэтому важно учитывать особенности каждого метода при выборе подходящего для решения конкретной задачи. Отметим, что на практике при решении

нелинейных уравнений обычно используется комбинация нескольких методов.

ВМИП Лекции по ЧМ ПМ

### **Лекция 3. Решение систем нелинейных уравнений (4ч. – 2ч. УСР+2ч. ЛР)**

1. Постановка задачи. Метод Ньютона. Общие замечания о сходимости процесса Ньютона. Модифицированный метод Ньютона.

2. Метод итераций. Условия сходимости метода итераций (первое и второе достаточные условия сходимости процесса итерации). Способы подготовки системы алгебраических уравнений к методу итераций. Примеры.

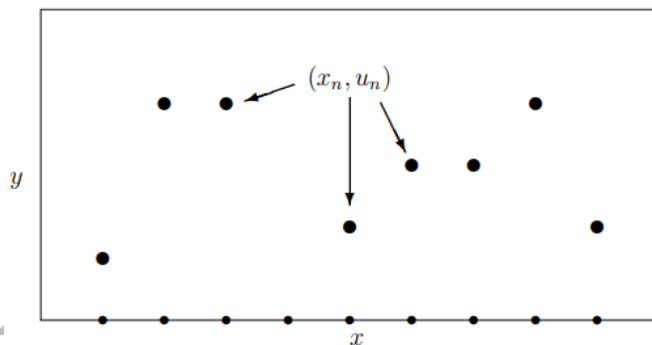
Материал для изучения находится в файле «УСР по ЧМ ПМ.pdf».

## Тема 2. Интерполирование и приближение функций

### Лекция 4. Введение в теорию интерполирования. Интерполяционная формула Лагранжа (4ч. – 2ч. ЛК+2ч. ЛР)

1. Постановка задачи интерполирования, основные понятия теории интерполирования.
2. Построение интерполирующей функции. Примеры интерполяционных функций. Постановка задачи глобальной полиномиальной интерполяции. Узлы интерполяции.
3. Существование и единственность интерполяционного многочлена. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Погрешности интерполяционной формулы Лагранжа.
4. Интерполяционная схема Эйткена.

Пусть нам задана функцией не аналитически, а в виде набора сеточных значений, то есть имеются узлы сетки по  $x$ , и в этих узлах задана функция  $y(x_n)$ , поэтому, фактически, у нас есть таблица чисел с координатами  $(x_n, u_n)$  для  $n = \overline{0, N}$ . **Задача интерполяции:**



найти приближенное значение функции в точке, не совпадающей с узлом сетки. Такие задачи часто встречаются на практике, например, когда функция  $y(x)$  определена в эксперименте.

**Постановка задачи интерполирования.** Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  некоторую  $m$  – кратно дифференцируемую функцию  $f(x)$ . Пусть в  $k_0$  точках  $x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0k_0}$  известны ее значения  $f(x_{01}), f(x_{02}), f(x_{03}), \dots, f(x_{0k_0})$ , в  $k_1$  точках  $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1k_1}$  известны значения первой производной  $f^{(1)}(x_{11}), f^{(1)}(x_{12}), \dots, f^{(1)}(x_{1k_1})$  и в  $k_m$  точках известны значения  $m$ -ой производной  $f^{(m)}(x_{m1}), f^{(m)}(x_{m2}), \dots, f^{(m)}(x_{mk_m})$ . Значения функции и ее производных называются **данными интерполирования**, а точки  $x_{ij}$  – **узлами интерполирования**.

**Задача интерполирования** заключается в отыскании функции  $\varphi(x)$  из некоторого класса  $\Phi$  такой, что выполняется условие

$$\varphi^{(i)}(x_{ij}) = f^{(i)}(x_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k_i. \quad (2.1)$$

Пусть  $n = k_0 + k_1 + \dots + k_m$ . Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  последовательность линейно независимых  $m$  – кратно дифференцируемых функций:  $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ . В качестве семейства  $\Phi$  возьмем всевозможные линейные комбинации первых  $n$  функций с произвольными коэффициентами

$$\varphi(x) = a_1 \omega_1(x) + a_2 \omega_2(x) + \dots + a_n \omega_n(x).$$

Из условия (2.1) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$

$$a_1 \omega_1^{(i)}(x_{ij}) + a_2 \omega_2^{(i)}(x_{ij}) + \dots + a_n \omega_n^{(i)}(x_{ij}) = f^{(i)}(x_{ij}). \quad (2.2)$$

Система (2.2) будет иметь единственное решение в том случае, если ее определитель отличен от нуля.

**Примеры интерполяционных функций.** Приведем примеры интерполяционных функций.

1. Рассмотрим следующую систему линейно независимых функций:  $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ . Тогда семейством  $\Phi$  является совокупность алгебраических многочленов вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n. \quad (2.3)$$

Геометрически это означает, что нужно найти алгебраическую кривую  $y = P_n(x)$ , проходящую через систему точек  $M_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  (рисунок 2.1).

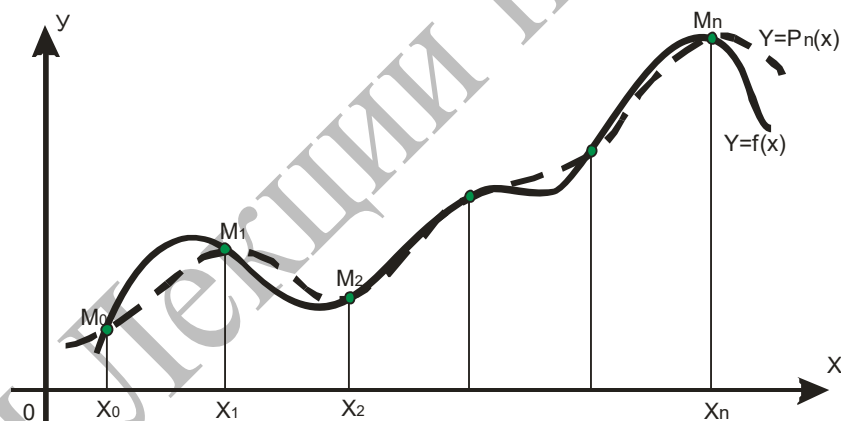


Рисунок 2.1 – Интерполяционный многочлен

Система уравнений, из которой определяются коэффициенты  $a_i$  из (2.3), будет

$$P_n(x_i) = a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + a_2 x_i^{n-2} + \dots + a_{n-1} x_i + a_n = f(x_i), \quad (2.4)$$

или

$$a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + a_2 x_0^{n-2} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n = f(x_0),$$

$$a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n = f(x_1),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + a_2 x_n^{n-2} + \dots + a_{n-1} x_n + a_n = f(x_n).$$

Ее определитель является определителем **Вандермонда**,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

и он отличен от нуля для различных между собой значениях  $x_i$ .

Интерполирование полиномами вида (2.3) называется *алгебраическим*. Многочлен  $P_n(x)$  называется **интерполяционным многочленом**. Точки  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) называются **узлами интерполяции**.

2. Для интерполирования периодических функций с периодом  $2\pi$  применяется система тригонометрических функций:  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots$ . Линейная комбинация первых  $2n+1$  функций является тригонометрическим многочленом степени  $n$

$$\varphi_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (2.5)$$

Интерполирование с помощью полиномов (2.5) называется *тригонометрическим*.

Пусть для функции  $f(x)$  построена интерполирующая функция  $\varphi(x)$ . Тогда, если определяется значение  $f(x)$  в точке  $\bar{x}$ , лежащей внутри отрезка  $[a, b]$  интерполирования, то такое восстановление функции называется **интерполяцией**. Если же точка  $\bar{x}$  лежит вне отрезка  $[a, b]$ , то такое восстановление функции называется **экстраполяцией**.

**Задача параболического интерполирования** формулируется следующим образом: на отрезке  $[a, b]$  в узлах интерполяции  $x_0, x_1, \dots, x_n$  задана функция  $y = f(x)$  своими значениями  $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$ . Требуется построить многочлен  $L_n(x)$  степени не выше  $n$  так, чтобы в узлах интерполяции  $x_0, x_1, \dots, x_n$  его значения совпадали с заданными значениями функции, то есть  $L_n(x_0) = y_0, L_n(x_1) = y_1, \dots, L_n(x_n) = y_n$ . Следует отметить, что узлы интерполяции  $x_0, x_1, \dots, x_n$  произвольно могут отстоять друг от друга, то есть  $x_{i+1} - x_i \neq \text{const}$ , так и быть равноотстоящими  $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$ ,  $h$  — шаг интерполяции.

**Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Построим формулу для произвольного расположения узлов интерполирования.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  заданы произвольные попарно различные узлы интерполирования  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ , в которых известны значения некоторой функции  $f(x)$ :  $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ . Построим полином  $L_n(x)$ , для которого выполняется равенство

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Решим сначала вспомогательную задачу и построим полином  $P_{n,i}(x)$  степени  $n$ , удовлетворяющий следующему условию

$$P_{n,i}(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ 1, & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (2.7)$$



Из условия (2.7) следует, что полином  $P_{n,i}(x)$  имеет  $n$  корней в узлах  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$ . Следовательно, он может быть записан в виде

$$P_{n,i}(x) = k_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n).$$

Так как  $P_{n,i}(x_i) = 1$ , то для коэффициентов  $k_i$  получаем выражение

$$k_i = ((x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n))^{-1}.$$

Очевидно, что тогда полином  $L_n(x)$ , удовлетворяющий (2.6), можно записать в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n P_{n,i}(x)y_i. \quad (2.8)$$

Формула (2.8) называется **интерполяционной формулой Лагранжа**. Обычно формулу Лагранжа записывают в другом виде. Рассмотрим полином  $\omega(x)$  степени  $n+1$

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\dots(x-x_n).$$

Для первой производной справедливо выражение

$$\omega'(x) = \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x-x_i).$$

С учетом введенных обозначений **полином Лагранжа** записывается в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} f(x_i), \quad (2.9)$$

или

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, i = \overline{0, n},$$

или

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i^n(x), i = \overline{0, n}, \quad (2.10)$$

где

$$L_i^n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, i = \overline{0, n}$$

коэффициенты формулы Лагранжа.

Укажем на некоторые особенности лагранжевой формулы (2.9), (2.10). Свойства интерполяционного многочлена зависят от двух факторов: от выбора узлов  $x_i$  и от интерполируемой функции  $f$ . В формуле (2.10) оба фактора разделены, т.к. многочлены  $L_i^n(x)$  зависят только от узлов, а свойства функции  $f$  учитываются множителями  $f(x_i)$  (или  $y_i$ ). В отношении вычислений формула Лагранжа удобна при интерполировании **многих функций в одной точке**  $x$ , так как значения множителей  $L_i^n(x)$  можно вычислить однажды и для всех функций. Но вычислительное применение формулы Лагранжа имеет существенный недостаток, т.к. нужно заранее определять число  $n+1$  узлов, необходимое для достижения заданной точности. Желание избежать ненужной затраты труда побуждает нас стараться обойтись наименьшим числом узлов и нередко оказывается, что заданное нами число узлов является недостаточным или бывает необходимо проверить точность полученного результата. В обоих случаях к взятым узлам добавляют еще один или несколько узлов и выполняют вычисления заново. Тогда в формуле (2.9) не

только добавляются новые члены, но необходимо пересчитывать и все ранее найденные члены суммы, так как в них появятся новые множители.

Полином Лагранжа предназначен для интерполирования в любой точке отрезка  $[a, b]$  как в случае равностоящих, так неравноотстоящих узлов интерполяции. Задача интерполирования состоит в вычислении значения функции в точке, когда точка  $x \in [a, b]$ , и экстраполяции, когда точка  $x \notin [a, b]$ . Точка  $x$  не является узлом интерполяции.

**Пример 2.1.** Построить полином Лагранжа для функции, заданной таблично

$i$	0	1	2	3
$x$	1	2	3	5
$y$	1	5	14	81

Из таблицы видно, что полином Лагранжа третьей степени, так как  $n = 3$ .

$$L_3(x) = 1 \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)} + 5 \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)} + 14 \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)} + 81 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-3)(5-2)} = x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$$

Сделаем проверку:  $x = x_0 = 1$ ,  $L_3(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 1$ ,  $f(x_0) = L_3(1) = 1$ .

В тех случаях, когда необходимо найти значение функции в точке отрезка  $[a, b]$  достаточно в формуле (5) вместо  $x$  подставить её значение.

**Единственность интерполяционного полинома Лагранжа.**

Доказательство проведем от противного.

Пусть  $L_n(x)$  – полином, отличный от  $L_n(x)$ , степени не выше  $n$  и такой, что  $L_n(x_i) = y_i$ ,  $(i = \overline{0, n})$ .

Тогда полином  $Q_n(x) = L_n(x) - L_n(x)$ , степень которого, очевидно, не выше  $n$ , обращается в нуль в  $(n+1)$  точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , то есть  $Q_n(x) \equiv 0$ .

Следовательно,  $L_n(x) \equiv L_n(x)$  и на множестве  $(n+1)$  точки можно построить полином степени не выше  $n$  и притом единственный.

**Погрешность формулы Лагранжа.** Проводя интерполирование по формуле (2.9), (2.10), мы допускаем некоторую погрешность  $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ , которая является нулевой в общем случае только в узлах интерполирования.

Будем считать, что на отрезке интерполирования  $[a, b]$  функция  $f(x)$  имеет все производные вплоть до  $n+1$  порядка включительно. Рассмотрим вспомогательную функцию  $\Psi(x) = f(x) - L_n(x) - k\omega(x)$ . Очевидно, что  $\Psi(x)$  имеет  $n+1$  корней в узлах  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ . Выберем произвольную точку  $\bar{x} \in [a, b]$  и подберем постоянную  $k$  так, чтобы выполнялось равенство

$$\Psi(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) - k\omega(\bar{x}) = 0, \quad (2.11)$$

Тогда отсюда определяется значение  $k$

$$k = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\omega(\bar{x})},$$

знаменатель этой дроби отличен от нуля, т.к.  $x \neq x_i, i = \overline{0, n}$

Функция  $\Psi(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) - k\omega(\bar{x})$  обращается в нуль на  $[a, b]$  в  $n+2$  точках  $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Следовательно, по теореме Ролля производная  $\Psi'(\bar{x})$  обращается в нуль по крайней мере  $n+1$  раз на интервале  $(a, b)$ . Пусть эти значения  $\bar{x}$  будут:  $\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}$ .

Применим снова теорему Ролля к функции  $\Psi'(\bar{x})$ . Получим по крайней мере  $n$  точек  $\xi_0^{(2)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_{n-1}^{(2)}$  таких, что

$$\Psi''(\xi_0^{(2)}) = \Psi''(\xi_1^{(2)}) = \Psi''(\xi_2^{(2)}) = \dots = \Psi''(\xi_{n-1}^{(2)}) = 0.$$

Продолжая этот процесс дальше, найдем, что существует по крайней мере одна точка  $\xi$  на интервале  $(a, b)$ , в которой  $\Psi^{(n+1)}(\xi) = 0$ , но  $\Psi^{(n+1)}(\bar{x}) = f^{(n+1)}(\bar{x}) - k(n+1)!$ , т.к. производная порядка  $n+1$  от многочлена  $L_n(x)$  степени  $n$  равна нулю, а производная от многочлена  $\omega(x)$  степени  $n+1$  со старшим коэффициентом 1 равна  $(n+1)!$

Положив в последнем равенстве  $\bar{x} = \xi$ , получим  $k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ .

$$\text{Отсюда } f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

или для оценки погрешности интерполирования на отрезке  $[a, b]$  имеем

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x). \quad (2.12)$$

Полагая  $M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ , для погрешности интерполирования (2.12) можно воспользоваться оценкой

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|. \quad (2.13)$$

Выражения (2.12), (2.13) могут служить оценкой отклонения  $f(x)$  от  $L_n(x)$  (оценкой погрешности интерполяционного полинома Лагранжа, как для функции заданной аналитически, так и для табличной функции), в случае, если производная  $f^{(n+1)}(\xi)$  может быть оценена.

**Линейное интерполирование по Эйткену.** Пусть функция задана таблично. Если значения  $x_i$  неравноотстоящие и требуется найти не общее выражение  $L_n(x)$ , а лишь его значения при некоторых  $x$ , то удобно пользоваться интерполяционной схемой Эйткена.

Вычислим значение функции в точке отличной от узлов интерполирования, начиная с построения линейного многочлена по 2-м узлам интерполяции. Пусть некоторый интерполяционный многочлен  $F(x)$  степени  $n$  принимает в узлах интерполяции  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  значения  $F(x_0) = y_0$ ,

$F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n$ . На отрезке  $[x_0, x_1]$  интерполяционные значения функции можно вычислить по линейной интерполяционной формуле Лагранжа

$$F_{0,1}(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}. \quad (2.14)$$

На отрезке  $[x_1, x_2]$  аналогично,

$$F_{1,2}(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}. \quad (2.15)$$

На отрезке  $[x_0, x_2]$

$$F_{0,2}(x) = y_0 \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}. \quad (2.16)$$

Заменим  $y_0$  и  $y_2$  в формуле (2.16) соответственно на  $F_{0,1}(x)$  и на  $F_{1,2}(x)$  и получим

$$F_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_{0,1}(x) & x_0 - x \\ F_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}. \quad (2.17)$$

Раскрыв определитель в (2.17) можно убедиться, что  $F_{0,1,2}$  есть многочлен 2-го порядка и в узлах интерполяции  $x_0, x_1, x_2$  принимает табличные значения  $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, F(x_2) = y_2$ .

Например, в точке  $x = x_0$  по формуле (2.14) получим

$$F_{0,1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ y_1 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = y_0 \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = y_0.$$

Применяя линейную интерполяцию к  $F_{0,1}(x)$  и  $F_{0,2}(x)$ , мы получим интерполяционный многочлен 2-й степени  $F_{0,1,2}(x)$ . Тот же результат можно получить, воспользовавшись двумя другими формулами

$$F_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_{0,1}(x) & x_1 - x \\ F_{0,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}, \quad F_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_{0,2}(x) & x_0 - x \\ F_{1,2}(x) & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}. \quad (2.18)$$

Аналогично можно построить многочлен  $n$ -ой степени на множестве  $n+1$  точки по двум различным интерполяционным полиномам степени  $n-1$ , каждый из которых построен по каким либо  $n$  узлам табличных данных.

**Пример 2.2.** Пусть функция задана таблично

$i$	0	1	2
$x_i$	0.66	0.67	0.68
$y_i$	0.61	0.62	0.62
	3	1	9

Пользуясь схемой Эйткена вычислить значение функции в точке  $x=0.674$ .

**Решение.** По формулам (2.14), (2.15) имеем

$$F_{0,1}(0.674) = \frac{\begin{vmatrix} 0.613 & 0.66 - 0.674 \\ 0.621 & 0.67 - 0.674 \end{vmatrix}}{0.67 - 0.66} = 0.62573,$$

$$F_{1,2}(0.674) = \frac{\begin{vmatrix} 0.621 & 0.67 - 0.674 \\ 0.629 & 0.68 - 0.674 \end{vmatrix}}{0.68 - 0.67} = 0.62564.$$

По формуле (2.17), находим

$$F_{0,1,2}(0.674) = \frac{\begin{vmatrix} 0.62573 & 0.66 - 0.674 \\ 0.62564 & 0.68 - 0.674 \end{vmatrix}}{0.68 - 0.66} = 0.62568.$$

## Лекция 5. Приближение функций интерполяционными многочленами. Интерполяционные формулы Ньютона для неравномерной сетки (4ч. – 2ч. ЛК+2ч. ЛР)

1. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для неравномерной сетки.
2. Разделенные разности и их свойства.
3. Остаточный член формулы Ньютона.

**Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона для неравноотстоящих узлов.** Для вывода этих формул введём понятие разделённой разности (разностных отношений) в таблице с неравноотстоящими узлами интерполяции.

Используя понятие разностных отношений и формулу Лагранжа, построим первый и второй интерполяционный многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов.

**Разностные отношения и их свойства.** В том случае, когда значения аргумента являются неравноотстоящими для исследования и вычисления функции используются разностные отношения (разделенные разности). Пусть на отрезке  $[a, b]$  заданы произвольные попарно различные узлы интерполирования  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ , в которых известны значения некоторой функции  $f(x)$ :  $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ .

**Разностными отношениями первого порядка** называются величины

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \dots, \quad f(x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}. \quad (2.19)$$

Иногда вместо  $f(x_i, x_{i+1})$  для обозначения разделенных разностей используют выражение  $[x_i, x_{i+1}]$ . И так для разных порядков разделенных разностей.

По разностным отношениям первого порядка составляются разностные отношения **второго порядка**

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, \dots \quad (2.20)$$

Разностные отношения любого порядка  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) определяются при помощи разностных отношений предыдущего порядка  $n-1$  по формуле

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}. \quad (2.21)$$

Удобно располагать таблицу разделенных разностей следующим образом

Таблица 2.1 – Таблица разделенных разностей

$x_0$	$f(x_0)$			
		$f(x_0, x_1) = [x_0, x_1]$		
$x_1$	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2) = [x_0, x_1, x_2]$	
		$f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$		$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = [x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_2$	$f(x_2)$		$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$	
		$f(x_2, x_3) = [x_2, x_3]$		$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2, x_3, x_4]$
$x_3$	$f(x_3)$		$f(x_2, x_3, x_4) = [x_2, x_3, x_4]$	
		$f(x_3, x_4) = [x_3, x_4]$		
$x_4$	$f(x_4)$			

Используя определение, можно показать, что разностное отношение является симметрической функцией своих аргументов так, что выполняется равенство (покажем ниже)

$$f(x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_0, x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n). \quad (2.22)$$

**Лемма 2.1.** Если  $P_n(x)$  полином степени  $n$ , то его разделенная разность  $n+1$  порядка равна нулю для любой системы попарно различных между собой чисел  $x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$

$$P_n(x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \equiv 0. \quad (2.23)$$

**Доказательство.** Так как полином  $P_n(x) - P_n(x_0)$  имеет корень в точке  $x_0$ , по определению разделенной разности, получим

$$P_n(x, x_0) = \frac{P_n(x_0) - P_n(x)}{x_0 - x} = P_{n-1}(x).$$

С учетом (2.20) полином  $P_n(x_0, x_1) - P_n(x, x_0)$  обращается в нуль в точке  $x_1$  и вторая разделенная разность будет полиномом степени  $n-2$

$$P_n(x, x_0, x_1) = \frac{P_n(x_0, x_1) - P_n(x, x_0)}{x_1 - x} = P_{n-2}(x).$$

Продолжая аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что

$$P_n(x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) = P(x_0) = \text{const},$$

и, следовательно, для разностного отношения  $n+1$  порядка справедливо равенство (2.23). Лемма доказана.

Отметим некоторые **свойства** разностных отношений.

**1. Свойство аддитивности.** Разделенная разность суммы или разности функций равна сумме или разности разделенных разностей слагаемых, соответственно уменьшаемого и вычитаемого, т.е. если  $f(x) = u(x) + v(x)$ , то  $f(x_0, x_1) = u(x_0, x_1) + v(x_0, x_1)$ .

**2. Свойство подобия.** Постоянный множитель можно выносить за знак разделенной разности, т.е. если  $f(x) = cu(x)$ , где  $c = \text{const}$ , то  $f(x_0, x_1) = cu(x_0, x_1)$ .

Свойства 1, 2 сформулированы для разностных отношений первого порядка, но они верны для разностных отношений любых порядков.

Следующее свойство получается как следствие из представления разностного отношения через значения функции. Для разностного отношения первого порядка, по определению, имеем,

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}. \quad (2.24)$$

Для разностного отношения второго порядка получим

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2) &= \frac{1}{x_2 - x_0} \{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)\} = \\ &= \frac{1}{x_2 - x_0} \left\{ \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \right\} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

При помощи индукции можно показать, что для любого  $n$  верно следующее представление

$$f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)}, \quad (2.26)$$

где  $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$ , а  $\omega'(x_i)$  значение производной от  $\omega(x)$  в точке  $x_i$ .

Если выполнить любую перестановку аргументов  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , то в последней части (2.26) переменятся местами слагаемые, что не изменит сумму. Это дает сформулировать следующее свойство:

**3. Свойство симметрии.** Разностное отношение  $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  есть симметричная функция своих аргументов (см. (6.21))  
 $f(x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_0, x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n)$ .

**4.** Если  $f(x)$  есть многочлен степени  $n$ , то разностное отношение  $n$ -го порядка  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  не зависит от  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  и равняется коэффициенту при старшей степени  $x$  в многочлене  $f(x)$ . Все разностные отношения порядка большего  $n$  равны нулю (лемма 2.1).

Приведем выражение произвольного значения функции  $f(x_n)$  через начальное её значение  $f(x_0)$  и начальные значения разностных отношений  $f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), f(x_0, x_1, x_2, x_3), \dots$ . По определению  $f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  и, следовательно,  $f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_0, x_1)$ .

Ввиду полученного результата и определения (2.25) будем иметь

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_1, x_2) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_0, x_1) + \\ &+ (x_2 - x_1)[f(x_0, x_1) + (x_2 - x_0)f(x_0, x_1, x_2)] = \\ &= f(x_0) + (x_2 - x_0)f(x_0, x_1) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)f(x_0, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Используя индукцию, получим выражение для любого  $n$

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_0) + (x_n - x_0)f(x_0, x_1) + (x_n - x_0)(x_n - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + \\ &+ (x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.27)$$



**Пример 2.3.** Составить таблицу разделённых разностей для функции, заданной таблично

$i$	0	1	2	3
$x$	0	1	5	10
$y$	10	20	100	1100

**Решение.**

Используя формулы (2.19) – (2.21) находим разделенные разности

$x_i$	$y_i$	1-й пор.	2-й пор.	3-й пор.
0	10			
		$\frac{20-10}{1-0} = 10$		
1	20		$\frac{20-10}{5-0} = 2$	
		$\frac{100-20}{5-1} = 20$		$\frac{20-2}{10-0} = 1.8$
5	100		$\frac{200-20}{10-1} = 20$	
		$\frac{1100-100}{10-5} = 200$		
10	1100			

Пусть  $L_n(x)$  полином Лагранжа, для которого выполняется условие (2.6) или

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.28)$$

т.е. значение многочлена и значение функции в узлах интерполирования совпадают точно.

Тогда по определению разностного отношения первого порядка имеем

$$L_n(x, x_0) = \frac{L_n(x_0) - L_n(x)}{x_0 - x}.$$

Откуда получаем

$$L_n(x) = L_n(x_0) + L_n(x, x_0)(x - x_0).$$

По определению, разностного отношения второго порядка имеем

$$L_n(x, x_0, x_1) = \frac{L_n(x_0, x_1) - L_n(x, x_0)}{x_1 - x}.$$

Откуда

$$L_n(x, x_0) = L_n(x_0, x_1) + L_n(x, x_0, x_1)(x - x_1).$$

Последовательно выражая разностные отношения  $m$ -го порядка через отношения  $m+1$ -го порядка по формуле

$$L_n(x, x_0, \dots, x_{m-1}) = L_n(x_0, x_1, \dots, x_m) + L_n(x, x_0, \dots, x_m)(x - x_m),$$

окончательно для полинома  $L_n(x)$  получим представление

$$\begin{aligned} L_n(x) = & L_n(x_0) + L_n(x_0, x_1)(x - x_0) + L_n(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \dots + L_n(x_0, x_1, \dots, x_i)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) + \dots + \\ & + L_n(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \\ & + L_n(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \end{aligned}$$

Учитывая (2.28) и то, что  $L_n(x, x_0, \dots, x_n) = 0$  (это следует из леммы 2.1: разделенная разность  $n+1$  порядка от многочлена степени  $n$  равна 0), получим **первую интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов**

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (2.29)$$

Она предназначена для интерполирования вперёд в начале отрезка  $[a, b]$  и экстраполяции назад.

Аналогичным образом можно построить и **вторую интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов**, которая имеет вид

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1). \quad (2.30)$$

Эта формула предназначена для интерполирования в конце отрезка  $[a, b]$  назад и экстраполяции вперёд.

Формула Ньютона имеет строение более сложное, чем интерполяционная формула Лагранжа (2.9), (2.10) и требует составление разностных отношений  $f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ . При вычислительном процессе формулы (2.29), (2.30) более удобны, чем формулам Лагранжа. При добавлении к  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  нового узла  $x_{n+1}$  все ранее найденные члены сохраняются и в формуле добавляется ещё один член  $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)f(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ . Это позволяет не задавать заранее число узлов и постепенно увеличивать точность результата, добавляя последовательно по одному новому узлу. В отличие от вычислений по формуле Лагранжа, добавление узла(ов) не приводит к повторению всей проделанной работы заново.

Кроме формулы (2.13) для оценки погрешности получим еще одну исходя из формулы Ньютона. Добавим к узлам  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  еще один узел  $x$  т.е. точку, в которой вычисляется значение функции  $f(x)$ . Тогда по формуле выражающей значения функции в узле через начальные разностные отношения, получим

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + f(x_0, x_1, \dots, x_n, x)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Заметим, что в правой части сумма всех слагаемых без последнего есть интерполяционная формула Ньютона (2.29). Тогда

$$f(x) = P_n(x) + f(x_0, x_1, \dots, x_n, x)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n),$$

или

$$R(x) = f(x) - P_n(x) = \omega(x)f(x_0, x_1, \dots, x_n, x). \quad (2.31)$$

Сравнивая формулы (2.12) ( $R_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(\bar{x})$ ) (для  $\forall \bar{x} \in [a, b]$  – погрешность формулы Лагранжа) и (2.31) получим, что

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

**Оценка погрешностей** состоит в следующем: можем воспользоваться оценкой погрешностей для интерполяционной формулы Лагранжа

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (2.32)$$

где  $\xi \in [a, b]$  и точке  $x$ .

Формулой (2.32) следует пользоваться, если функция  $f(x)$  аналитическая.

Если функция задана таблично, то следует положить

$$f^{(n+1)}(x) \approx [x, x_0, x_1, \dots, x_{n+1}].$$

## Лекция 6. Приближение функций интерполяционными многочленами. Интерполяционные формулы Ньютона для равномерной сетки (4ч. – 2ч. ЛК+2ч. ЛР)

1. Интерполяционные формулы Ньютона для равномерной сетки.
2. Конечные разности и их свойства.
3. Остаточные члены интерполяционных формул Ньютона.

**Конечные разности и их свойства.** Конечные разности в вычислительной математике имеют значение, аналогичное дифференциалам в анализе бесконечно малых величин.

Пусть даны **равноотстоящие** друг от друга узлы  $x_k = x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) и известны соответствующие значения функции  $y_k = f(x_k) = f(x_0 + kh)$ . Здесь  $h = \Delta x = x_k - x_{k-1}$  – некоторое фиксированное значение аргумента. (или рассмотрим таблицу значений функции с **постоянным шагом  $h$** , для которой значения аргумента определяются формулой  $x_k = x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), значения функции  $y_k = f(x_k) \Rightarrow$  узлы  $x_k$  – равноотстоящие).

**Конечными разностями нулевого** порядка называются величины  $y_k$  равные значениям функции  $f(x_k)$  в узлах  $x_k$ , т.е.  $y_k = f(x_k)$ . Конечной разностью *первого* порядка называется разность между значениями функции в соседних узлах интерполяции

$$\begin{aligned}\Delta y_0 &= y_1 - y_0 \equiv f(x_0 + h) - f(x_0), \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \\ \Delta y_2 &= y_3 - y_2, \dots, \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Конечные разности *второго* порядка определяются равенствами по отношению к разностям первого порядка (дельта два игрек нулевое)

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots, \\ \Delta^2 y_k &= \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) \equiv y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k.\end{aligned}$$

Разности *n*-го порядка определяются по формуле

$$\Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

Конечные разности любого порядка легко выражаются через значения функции

$$\Delta^n y_0 = y_n - \frac{n}{1!} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} y_{n-2} - \dots + (-1)^n y_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i y_{n-i}, \quad (2.35)$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  (число сочетаний из  $n$  по  $k$ ).

**Доказательство** проведем по индукции. Пусть эта формула верна для  $n = k$ . Покажем, что она будет верна и при  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned}\Delta^{k+1} y_0 &= \Delta^k y_1 - \Delta^k y_0 = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_{k-i+1} - \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_{k-i} = \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_{k-i+1} - \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i C_k^{i-1} y_{k-i+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (C_k^i + C_k^{i-1}) y_{k-i+1} = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left( \frac{k!}{i!(k-i)!} + \frac{k!}{(i-1)!(k-i+1)!} \right) y_{k-i+1} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left( \frac{k!}{i!(k+1-i)!} (k-i+1+i) \right) y_{k+1-i} = \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} y_{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i C_{k+1}^i y_{k+1-i}.
\end{aligned}$$

Аналогично доказывается формула

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1!} \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^n y_0 = \sum_{i=0}^n C_n^i \Delta^i y_0 = (1 + \Delta)^n y_0. \quad (2.36)$$

Из определения конечных разностей вытекают следующие свойства

1. Если  $f(x) = u(x) + v(x)$ , то  $\Delta f(x) = \Delta u(x) + \Delta v(x)$ ; если функция представлена в виде суммы двух функций, то конечная разность исходной функции представляется как сумма конечных разностей слагаемых.

2. Если  $f(x) = cu(x)$ ,  $c = \text{const}$ , то  $\Delta f(x) = c \Delta u(x)$ ; при умножении функции на  $\text{const}$ , конечные разности умножаются на тот же множитель.

3. Конечные разности  $n$ -го порядка от многочлена степени  $n$  постоянны  $\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n = \text{const}$ , а  $\Delta^{n+1} P_n(x) = 0$ ;

4.  $\Delta^m (\Delta^n f(x)) = \Delta^{m+n} f(x)$ .

Таблицу конечных разностей обычно располагают следующим образом:

Таблица 2.2 – Конечные разности

$x$	$f$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
$x_0$	$f_0$						
		$\Delta f_0$					
$x_1$	$f_1$		$\Delta^2 f_0$				
		$\Delta f_1$		$\Delta^3 f_0$			
$x_2$	$f_2$		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$		
		$\Delta f_2$		$\Delta^3 f_1$		$\Delta^5 f_0$	
$x_3$	$f_3$		$\Delta^2 f_2$		$\Delta^4 f_1$		$\Delta^6 f_0$
		$\Delta f_3$		$\Delta^3 f_2$		$\Delta^5 f_1$	
$x_4$	$f_4$		$\Delta^2 f_3$		$\Delta^4 f_2$		
		$\Delta f_4$		$\Delta^3 f_3$			
$x_5$	$f_5$		$\Delta^2 f_4$				
		$\Delta f_5$					
$x_6$	$f_6$						

**Теорема о существовании интерполяционного многочлена.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  в  $n+1$  узле  $x_k = x_0 + kh$  ( $k=0,1,2,\dots,n$ ) заданы значения ограниченной функции  $f(x)$ :  $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ . Поставим задачу нахождения полинома  $P_n(x)$  степени не выше  $n$  такого, чтобы выполнялось условие

$$f(x_i) = P_n(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.37)$$



Для практических целей формулу Ньютона (2.41) удобнее записывать в несколько ином виде. Введем переменную  $q = \frac{x-x_0}{h}$ . Тогда  $x-x_0=qh$ . Таким образом, для полинома  $P_n(x)$  получим выражение

$$P_n(x(q)) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (2.42)$$

Формулу (2.42) выгодно использовать для интерполирования в окрестности начального значения  $x_0$ . Поэтому ее часто называют формулой для **интерполирования вперед**. В этой формуле из таблицы 2.2 (таблица конечных разностей) используются разности  $\Delta^k f_0$  верхней диагонали. В этой формуле  $q$  представляет собой число шагов, необходимых для достижения точки  $x$ , исходя из точки  $x_0$ .

Остаточный член в формуле (2.42) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где  $\xi$  – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы  $x_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  и точку  $x$ . При наличии дополнительного узла  $x_{n+1}$  на практике пользуются более удобной приближенной формулой

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)\dots(q-n).$$

При  $n=1$  из (2.42) получается формула *линейного* интерполирования

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

При  $n=2$  из (2.42) имеет место формула *параболического* или *квадратического* интерполирования

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

**Вторая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов.** Первая интерполяционная формула Ньютона практически неудобна для интерполирования функций в конце таблицы. Поэтому, когда точка интерполирования лежит вблизи точки  $x_n$  удобно пользоваться **второй интерполяционной формулой Ньютона**, которая имеет вид

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_n}{1!h}(x-x_n) + \dots + \frac{\Delta^n y_n}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1). \quad (2.43)$$

Вводя новую переменную  $q = \frac{x-x_n}{h}$ , эту формулу перепишем в виде

$$P_n(x(q)) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (2.44)$$

В формуле (2.44) из таблицы 2.2 (таблица конечных разностей) используются разности  $\Delta^k f_i$  нижней диагонали.

Остаточный член формулы (2.44) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (2.44')$$

где точка  $\xi$  имеет тот же смысл, что и ранее.

Отметим, что формулы Ньютона используются и для экстраполирования функций. Если  $x < x_0$ , то для *экстраполирования назад*

используют первую интерполяционную формулу Ньютона. Если  $x > x_0$ , то для экстраполирования вперед используют вторую интерполяционную формулу Ньютона. Следует заметить, что операция экстраполирования менее точна, чем операция интерполирования в узком смысле.

ВМИП Лекции по ЧМ ПМ



## Лекция 7. Приближение функций интерполяционными многочленами. Интерполирование внутри таблицы (3ч. – 2ч. ЛК+1ч. ЛР)

1. Интерполяционные формулы, использующие центральные разности. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя и Эверетта.

2. Остаточные члены интерполяционных формул с центральными разностями.

3. Общая задача интерполирования алгебраическими многочленами.

4. Интерполяционный многочлен Эрмита. Остаточный член интерполяционной формулы Эрмита.

Интерполяционные формулы Ньютона предназначены для интерполирования в начале или в конце отрезка  $[a, b]$ , используя диагональные таблицы разностей, так как в формулы входят лишь значения функций, лежащие по одну сторону от выбранного начального значения. Основной недостаток интерполяционных формул Ньютона – они используют лишь односторонние значения функции, т.е. эти формулы носят односторонний характер.

На практике часто оказывается полезным использовать формулы, в которых присутствуют как последующие, так и предыдущие значения функции по отношению к ее начальному значению  $y_0$ . При интерполировании в середине  $[a, b]$  удобно пользоваться **таблицей центральных разностей**. Для такой таблицы  $x_i = x_0 + ih$ ,  $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ,  $y_i = f(x_i)$ ,  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ,  $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$  – конечные разности. Интерполяционные формулы, использующие такие разности, носят название интерполяционных формул с центральными разностями. К их числу относят формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя.

Рассмотрим  $2n+1$  равноотстоящих узлов  $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , в которых заданы значения некоторой функции  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = -n, \dots, n$ . Требуется найти полином степени не выше  $2n$ , такой, чтобы выполнялось условие

$$P_{2n}(x_i) = y_i = f(x_i), \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n. \quad (2.45)$$

Будем искать полином в виде

$$P_{2n}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + a_{2n}(x-x_{-n+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n). \quad (2.46)$$

Поступая по аналогии с выводом первой интерполяционной формулы Ньютона, для коэффициентов  $a_i$  получим следующие выражения

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2}, \quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!h^3}, \quad a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!h^4}, \dots, \\ a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{(2n-1)!h^{2n-1}}, \quad a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}. \quad (2.47)$$

Введем новую переменную  $q = \frac{x-x_0}{h}$  и, подставляя преобразованные выражения для коэффициентов (2.47) в соотношение (2.46), получим **первую интерполяционную формулу Гаусса** (для интерполирования вперёд)

$$P_{2n}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\ + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q+1)q(q-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!} \cdot \\ \cdot \Delta^{2n-1} y_{-n+1} + \frac{(q+n-1)\dots(q+1)q(q-1)\dots(q-n)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}. \quad (2.48)$$

Разности  $\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$ , используемые в этой формуле, образуют нижнюю ломаную линию в диагональной таблице 2.3. (см. ниже).

Если полином  $P_{2n}(x)$  искать в виде

$$P_{2n}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_{-1})(x-x_0) + a_3(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1) + \\ + \dots + a_4(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1) + a_{2n-1}(x-x_{-n+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_0) \cdot \\ \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1}) + a_{2n}(x-x_{-n}) \cdot \dots \cdot (x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1}),$$

то аналогично (2.48) можно получить **вторую интерполяционную формулу Гаусса** (для интерполирования назад)

$$P_{2n}(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-2} + \\ + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q+1)q(q-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!} \cdot \\ \cdot \Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n-1)\dots(q+1)q(q-1)\dots(q-n)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}. \quad (2.49)$$

Разности  $\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$ , используемые в этой формуле, образуют верхнюю ломаную линию в таблице разностей 2.3.

Формулы Гаусса применяются для интерполирования в середине таблицы вблизи  $x_0$ . При этом первая формула Гаусса (2.48) применяется при  $x > x_0$ , а вторая (2.49) – при  $x < x_0$ .

**Интерполяционная формула Ньютона-Стирлинга.** Среднее арифметическое первой (2.48) и второй (2.49) формул Гаусса дает **интерполяционную формулу Ньютона-Стирлинга**

$$P_{2n}(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} q + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q^2-1)q}{3!} \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \\ + \frac{q^2(q^2-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q+1)q(q-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!} \cdot \\ \cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n+1} + \Delta^{2n-1} y_{-n}}{2} + \frac{q^2(q^2-1)\dots(q^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n},$$

где  $q = \frac{x-x_0}{h}$ .

Остаточный член интерполяционной формулы Ньютона-Стирлинга имеет вид

$$R_{2n}(x) = h^{2n+1} \frac{q^2(q^2-1)\dots(q^2-n^2)}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\xi),$$

где точка  $\xi$  принадлежит отрезку, содержащему узлы  $x_0 - nh$ ,  $x_0 + nh$  и точку  $x$ .

Таблица 2.3 – Диагональная таблица разностей

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
$x_{-4}$	$y_{-4}$						
		$\Delta y_{-4}$					
$x_{-3}$	$y_{-3}$		$\Delta^2 y_{-4}$				
		$\Delta y_{-3}$		$\Delta^3 y_{-4}$			
$x_{-2}$	$y_{-2}$		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
		$\Delta y_{-2}$		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
$x_{-1}$	$y_{-1}$		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
		$\Delta y_{-1}$		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
$x_0$	$y_0$		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
		$\Delta y_0$		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
$x_1$	$y_1$		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$
		$\Delta y_1$		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
$x_2$	$y_2$		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
		$\Delta y_2$		$\Delta^3 y_1$			
$x_3$	$y_3$		$\Delta^2 y_2$				
		$\Delta y_3$					
$x_4$	$y_4$						

**Интерполяционная формула Ньютона-Бесселя.** Кроме формулы Ньютона-Стирлинга для  $2n+2$  равноотстоящих узлов  $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  часто используют интерполяционную формулу Ньютона-Бесселя, которая имеет вид

$$P_{2n+1}(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + (q - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} +$$

$$+ \frac{(q - \frac{1}{2})q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} +$$

$$+ \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!} \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} +$$

$$+ \frac{(q - \frac{1}{2})q(q-1)(q+1)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n},$$

где  $q = \frac{x - x_0}{h}$ .

Остаточный член интерполяционной формулы Ньютона-Бесселя следующий

$$R_{2n+2}(x) = h^{2n+2} \frac{q(q-1)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi),$$

где точка  $\xi$  принадлежит отрезку, содержащему узлы  $x_0 - nh$ ,  $x_0 + nh + h$  и точку  $x$ .

**Интерполирование с кратными узлами.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  заданы  $m$  узлов. В каждом узле  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  известны значения функции  $f(x_i)$  и ее производных  $f^{(1)}(x_i), f^{(2)}(x_i), \dots, f^{(\alpha_i-1)}(x_i)$ . Будем считать, что  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n+1$ . Необходимо найти многочлен  $P_n(x)$  степени не выше  $n$  такой, что выполняется условие

$$P_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k), \quad i = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1; \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.50)$$

Покажем, что система (2.50) имеет единственное решение. Для этого рассмотрим однородную систему

$$P_n^{(i)}(x_k) = 0. \quad (2.51)$$

Из (2.51) вытекает, что многочлен  $P_n(x)$  имеет корни в узлах  $x_k$  кратности  $\alpha_k$ . Следовательно, его можно записать в виде

$$P_n(x) = l(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_m)^{\alpha_m}.$$

Справа в этом выражении стоит многочлен степени  $n+1$  и он может совпадать с многочленом степени  $n$  только в том случае, если  $P_n(x) \equiv 0$ . Последнее означает, что однородная система (2.51) имеет лишь тривиальное решение и, следовательно, система (2.50) имеет единственное решение.

Многочлен  $P_n(x)$ , который удовлетворяет равенствам (2.50), называют **многочленом Эрмита**. Он имеет вид

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} f^{(i)}(x_k) \frac{A_{n+1}(x)}{i!(x-x_k)^{\alpha_k}} \sum_{j=0}^{\alpha_k-i-1} \frac{1}{j!} \left( \frac{(x-x_k)^{\alpha_k}}{A_{n+1}(x)} \right)^j (x-x_k)^{i+j}, \quad (2.52)$$

где  $A_{n+1}(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_m)^{\alpha_m}$ .

Когда все узлы имеют кратность равную двум, многочлен Эрмита можно записать в более простой форме

$$H_{2m-1}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\omega^2(x)}{(x-x_k)^2 (\omega^{(1)}(x_k))^2} \cdot \left( \left( 1 - \frac{\omega^{(2)}(x_k)}{\omega^{(1)}(x_k)} (x-x_k) \right) f(x_k) + (x-x_k) f^{(1)}(x_k) \right).$$

Если  $f(x)$   $n+1$  раз непрерывно дифференцируемая функция, то аналогично тому, как это было сделано для интерполяционного полинома Лагранжа, можно показать, что для погрешности интерполирования с кратными узлами справедлива формула

$$R_n(f) = f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} A_{n+1}(x). \quad (2.53)$$

Простейшим примером многочлена Эрмита, построенного для одного узла кратности  $\alpha_k$ , является отрезок ряда Тейлора

$$P_{2k-1}(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f^{(1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{\alpha_k-1}}{(\alpha_k-1)!} f^{(\alpha_k-1)}(x_0).$$

Формулы с центральными разностями следует использовать, когда интерполирование проводится в середине таблицы. Если при этом  $|q| \leq 0.25$ , то целесообразно применять интерполяционную формулу Ньютона-Стирлинга, а при  $0.25 \leq |q| \leq 0.75$  – интерполяционную формулу Ньютона-Бесселя.

Следует отметить, что все приведенные выше формулы являются различными формами записи интерполяционного многочлена и поэтому любая из них может быть использована для интерполирования функции. Однако с вычислительной точки зрения они не равноценны. Каждая форма записи организована таким образом, что для соответствующего случая расположения точки интерполирования  $\bar{x}$ , в первую очередь вычисляются слагаемые, влияние которых на результат наиболее существен.

**Замечание 2.1.** При интерполировании функций, заданных таблицей с постоянным шагом  $h$  аргумента, рекомендуется руководствоваться следующими правилами:

1. Составляя таблицу разностей, определяют максимальный порядок разностей, которые ведут себя правильно. Это означает следующее. Обычно значения функции в таблице приближенные. Если их предельная абсолютная погрешность может достигать половины единицы последнего разряда, то погрешность в разностях первого порядка может достигать уже единицы последнего разряда, в разностях второго порядка – двух единиц последнего разряда и т.д.

Для гладких функций обычно разности убывают с порядком, при некотором порядке становятся почти постоянными, и, следовательно, разности следующего порядка будут малы, но из-за неточности значений функции в дальнейшем с увеличением порядка разности начинают расти, имея беспорядочные знаки. Они-то уже и будут неправильными и их нельзя использовать при интерполировании.

2. Определив наивысший порядок разностей, которые можно использовать при интерполировании, выбирают интерполяционную формулу. Если значение  $x$  находится близко к началу отрезка  $[a, b]$ , то при интерполировании нужно использовать формулу Ньютона для интерполирования вперед, а при  $x$  близких к концу отрезка – формулу Ньютона для интерполирования назад, так как только эти формулы допускают использование правильных разностей до максимального порядка. Если же значения  $x$ , для которого нужно вычислить значение функции, находится на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ , то нужно применять формулы Стирлинга или Бесселя, применяя за начальный узел в них узел  $x_i$  или  $x_{i+1}$  в зависимости от того, который из них ближе к  $x$ . При этом применяется формула Стирлинга, если  $|q| \leq 0.25$  и формула Бесселя при  $0.25 \leq |q| \leq 0.75$ . Кроме того, при использовании формулы Стирлинга необходимо учитывать последнюю

правильную разность нечетного порядка, а при использовании формулы Бесселя – последнюю правильную разность четного порядка.

**Пример 2.4.** Для функции  $y = e^x$  построить таблицу значений функции на отрезке  $[1.15; 1.30]$ ,  $h = 0.05$ . С помощью интерполяционной формулы Гаусса найти значение функции  $e^{1.13}$  и  $e^{1.17}$ .

**Решение.**

Составляем таблицу разностей

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-3	1.00	2.7183	0.1394	0.0071	0.0004
-2	1.05	2.8577	0.1465	0.0075	0.0004
-1	1.10	3.0042	0.1540	0.0079	0.0004
0	1.15	3.1582	0.1619	0.0083	0.0005
1	1.20	3.3201	0.1702	0.0088	
2	1.25	3.4903	0.1790		
3	1.30	3.6693			

Замечаем, что третьи разности практически постоянны. Поэтому в формулах (2.48) и (2.49) достаточно взять  $n = 3$ .

Для вычисления  $e^{1.17}$  используем формулу (2.48) (поскольку  $1.17 > 1.15$ ) при

$$n = 3 \text{ и } q = \frac{1.17 - 1.15}{0.05} = 0.4 :$$

$$\begin{aligned} e^{1.17} &= y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} = \\ &= 3.1582 + 0.4 \cdot 0.1619 + \frac{0.4 \cdot (-0.6)}{2} \cdot 0.0079 + \frac{0.4 \cdot (-0.6) \cdot 1.4}{6} \cdot 0.0004 = 3.2220. \end{aligned}$$

Полученное значение  $e^{1.17} = 3.2220$  расположено между  $3.1582 < 3.2220 < 3.3201$  (см. таблицу, т.к.  $1.15 < 1.17 < 1.20$ ), следовательно, вероятно, значение функции в точке нашли правильно.

Для вычисления  $e^{1.13}$  используем формулу (2.49) (поскольку  $1.13 < 1.15$ ) при

$$n = 3 \text{ и } q = \frac{1.13 - 1.15}{0.05} = -0.4 :$$

$$\begin{aligned} e^{1.13} &= y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-2} = \\ &= 3.1582 - 0.4 \cdot 0.1540 - \frac{0.6 \cdot 0.4}{2} \cdot 0.0079 + \frac{0.6 \cdot (-0.4) \cdot (-1.4)}{6} \cdot 0.0004 = 3.0957. \end{aligned}$$

**Лекция 8. Приближение функций интерполяционными многочленами. Интерполирование функций многих переменных (2ч. УСР)**

1. Интерполирование функций многих независимых переменных.
2. Трудности задачи интерполирования функций многих переменных.
3. Обобщение интерполяционных формул Ньютона на случай функции многих переменных.

Материал для изучения находится в файле «УСР по ЧМ ПМ.pdf».

ВМИП Лекции по ЧМ ПМ

## Лекция 9. Приближение функций интерполяционными многочленами. Обратное интерполирование (3ч. – 2ч. ЛК+1ч. ЛР)

1. Постановка задачи обратного интерполирования.
2. Формулы для равномерной и неравномерной сетки.
3. Интерполирование с кратными узлами.

Часто на практике возникает задача об отыскании по заданному значению функции  $y$  значения аргумента  $x$ . Эта задача решается методом **обратного интерполирования**.

Если заданная функция монотонна, то обратное интерполирование проще всего осуществить путем замены функции аргументом и обратно, и последующего интерполирования.

Если заданная функция не монотонна, то этим приемом воспользоваться нельзя. Тогда не меняя ролями функцию и аргумент, записываем ту или иную интерполяционную формулу, используя известные значения аргумента и считая функцию известной, решаем полученное уравнение относительно аргумента.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  заданы узлы интерполирования  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  и известны соответствующие значения  $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ . Теперь необходимо по заданному значению функции  $\bar{y}$  определить аргумент  $\bar{x}$ , соответствующий этому значению. Для произвольной функции задача обратного интерполирования не может быть решена однозначно. Решение будет однозначным, если функция  $f(x)$  монотонна на минимальном отрезке, содержащем узлы интерполирования.

**Формулы для равноотстоящих и неравноотстоящих узлов.** Рассмотрим два случая.

1. Если узлы интерполирования **равноотстоящие**, то для решения поставленной задачи можно использовать метод **последовательных приближений**, который заключается в следующем. Пусть функция  $f(x)$  монотонна и значение  $y$  содержится между  $y_0 = f(x_0)$  и  $y_1 = f(x_1)$ .

Заменяем функцию  $y$ , например, первым интерполяционным многочленом Ньютона для равных промежутков

$$y = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (2.58)$$

Рассматривая последнее выражение как уравнение относительно  $q$ , находим  $q$  по заданному значению  $y$ , а затем вычисляем  $x = x_0 + qh$ .

Если число узлов велико, то получим алгебраическое уравнение высокой степени. При решении такого уравнения удобно применить метод итераций. Перепишем уравнение (2.58) в виде

$$q = \varphi(q) = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0} q(q-1) - \dots - \frac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0} q(q-1)\dots(q-n+1). \quad (2.59)$$



В качестве нулевого приближения (начальное приближение) можно взять

$$q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}.$$

Применяя метод итераций для отыскания  $q$  получим

$$q_m = \varphi(q_{m-1}), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.60)$$

Для достаточно гладких функций при достаточно малом шаге  $h = x_{i+1} - x_i$  итерационный процесс (2.60) сходится, при этом сходится к искомому корню, т.е.  $q = \lim_{m \rightarrow \infty} q_m$ .

Условием сходимости является выполнение неравенства

$$|\varphi'(q)| \leq \alpha < 1.$$

На практике итерации прекращают, когда выполняется условие  $|q_{m-1} - q_m| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность, тогда полагают  $q \approx q_m$ .

Далее определяем  $x$ :  $x = x_0 + qh$ .

**Замечание 2.2.** Указанный метод итераций для обратной интерполяции требует монотонности функции  $f(x)$  только на интервале  $(x_0, x_1)$ , где  $y_0 < y < y_1$  или  $y_0 > y > y_1$ . Узлы же применяемой интерполяционной формулы могут лежать и вне интервала монотонности функции  $f(x)$ .

Пусть  $f(x)$  задана таблицей, узлы интерполирования  $x_i$  – **неравноотстоящие**. Задача обратного интерполирования заключается в том, чтобы по заданному значению функции  $y$  определить соответствующее значение аргумента  $x$ . Будем считать, что на рассматриваемом интервале функция  $f(x)$  монотонна, поставленная задача имеет единственное решение. В этом случае задача решается с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа. Для этого достаточно принять переменную  $y$  за независимую и записать формулу, выражающую  $x$  как функцию  $y$ .

Тогда, написав по заданным узлам  $(y_i, x_i), i = \overline{0, n}$  многочлен Лагранжа

$$x = \sum_{i=0}^n x_i \cdot \frac{(y - y_0) \dots (y - y_{i-1})(y - y_{i+1}) \dots (y - y_n)}{(y_i - y_0) \dots (y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1}) \dots (y_i - y_n)}, \quad (2.61)$$

можно определить  $x$  по заданному  $y$ . Остаточный член в этом случае можно получить из остаточного члена формулы Лагранжа, меняя местами  $x$  и  $y$ .

Можно также использовать интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов:

$$x = x_0 + \varphi(y_0, y_1) \cdot (y - y_0) + \varphi(y_0, y_1, y_2) \cdot (y - y_0)(y - y_1) + \dots + \\ + \varphi(y_0, y_1, \dots, y_n) \cdot (y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{n-1}),$$

где

$$\varphi(y_0, y_1) = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0},$$

$$\varphi(y_0, y_1, y_2) = \frac{\varphi(y_1, y_2) - \varphi(y_0, y_1)}{y_2 - y_0},$$

...

$$\varphi(y_0, y_1, \dots, y_n) = \frac{\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) - \varphi(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})}{y_n - y_0} -$$

соответствующие разделенные разности.

**Интерполирование с кратными узлами.** См. Лекцию 7.

**Пример 2.5.** Используя таблицу значений функции  $y = \operatorname{sh} x$  (см. таблицу ниже), найти  $x$ , при котором  $\operatorname{sh} x = 5$ .

**Решение.**

Из таблицы видно, что значения  $x$  равноотстоящие, а  $y = 5$  находится в начале таблицы интерполирования, значит применима первая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов (I ИФН).

Значения функции  $y = \operatorname{sh} x$  и конечные разности

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2,2	4,457	1,009	0,220	0,054
2,4	5,466	1,229	0,274	0,043
2,6	6,695	1,503	0,317	
2,8	8,198	1,820		
3,0	10,018			

Составляем I ИФН, останавливаясь на разностях третьего порядка, т. к. они практически постоянны

$$y = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2} q(q-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6} q(q-1)(q-2).$$

Полагаем  $x_0 = 2,2$ , т.к. заданное значение  $y = 5$  находится между  $y_0 = 4,457$  и  $y_1 = 5,466$ .

В нашем случае итерирующая функция имеет вид

$$q = \varphi(q) = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0} q(q-1) - \frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta y_0} q(q-1)(q-2).$$

Принимая  $y_0 = 4,457$ , определяем начальное приближение

$$q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} = \frac{5 - 4,457}{1,009} = \frac{0,543}{1,009} = 0,538.$$

Затем последовательно находим

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0} q_0(q_0 - 1) - \frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta y_0} q_0(q_0 - 1)(q_0 - 2) = \\ &= 0,538 + \frac{0,538 \cdot 0,462}{2} \cdot \frac{0,220}{1,009} - \frac{0,538 \cdot 0,462 \cdot 1,462}{6} \cdot \frac{0,054}{1,009} = 0,5641, \end{aligned}$$

$$q_2 = \frac{y-y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0} q_1 (q_1 - 1) - \frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta y_0} q_1 (q_1 - 1)(q_1 - 2) =$$

$$= 0,538 + \frac{0,5644 \cdot 0,4356}{2} \cdot \frac{0,220}{1,009} - \frac{0,5644 \cdot 0,4356 \cdot 1,4356}{6} \cdot \frac{0,054}{1,009} = 0,5644.$$

Таким образом, поскольку  $q_1$  и  $q_2$  постоянны, можем принять  $q = 0,564$  и

$$x = x_0 + qh = 2,2 + 0,564 \cdot 0,2 = 2,313,$$

с точностью до  $\varepsilon = 0,001$ .

**Пример 2.6.** Функция  $y = f(x)$  задана таблицей

$x$	10	15	17	20
$y$	3	7	11	17

Найти значение  $x$ , для которого  $y = 10$ .

**Решение.**

Узлы  $x_i$  – неравноотстоящие, следовательно, используем интерполяционный многочлен Лагранжа в виде

$$x(y) = \sum_0^3 x_i L_i^{(3)}(y),$$

где  $L_i^{(3)}(y)$  – лагранжевы коэффициенты.

Для вычисления коэффициентов многочлена Лагранжа удобно применить следующие расположения разностей, подчеркнув разности, расположенные на главной диагонали

$$\begin{array}{l} i=0 \quad \underline{y-y_0} \quad y_0-y_1 \quad y_0-y_2 \quad y_0-y_3 \\ i=1 \quad y_1-y_0 \quad \underline{y-y_1} \quad y_1-y_2 \quad y_1-y_3 \\ i=2 \quad y_2-y_0 \quad y_2-y_1 \quad \underline{y-y_2} \quad y_2-y_3 \\ i=3 \quad y_3-y_0 \quad y_3-y_1 \quad y_3-y_2 \quad \underline{y-y_3} \end{array}$$

Обозначим произведение элементов  $i$  – ой строки через  $D_i$ , а произведение главной диагонали через  $\Pi_{n+1}(y)$ , то есть  $\Pi_{n+1}(y) = (y-y_0) \cdot (y-y_1) \cdot \dots \cdot (y-y_n)$ . Тогда

$$L_i^{(n)}(y) = \frac{\Pi_{n+1}(y)}{D_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Для  $i = 3$ , имеем

$$L_0^{(3)}(y) = \frac{\Pi_4(y)}{D_0}, \quad L_1^{(3)}(y) = \frac{\Pi_4(y)}{D_1}, \quad L_2^{(3)}(y) = \frac{\Pi_4(y)}{D_2}, \quad L_3^{(3)}(y) = \frac{\Pi_4(y)}{D_3},$$

таким образом, достаточно вычислить один раз  $\Pi_4(y)$  (в общем случае  $\Pi_{n+1}(y)$ ) (т.е. числитель) – для вычисления коэффициентов многочлена Лагранжа, при дальнейших вычислениях необходимо будет вычислить только знаменатели  $\Rightarrow$  рациональность вычислений, уменьшается возможность допустить ошибку.

Итак, поскольку мы решаем обратную задачу интерполирования, то в рассуждениях выше  $x$  заменяем на  $y$ , и, следовательно, будем иметь  $\Pi_4(y) = 147$ ,  $D_0 = -3136$ ,  $D_1 = 480$ ,  $D_2 = 192$ ,  $D_3 = -5880$ .

$$L_0^{(3)}(y) = -0,04688, L_1^{(3)}(y) = 0,30625, L_2^{(3)}(y) = 0,765625, L_3^{(3)}(y) = -0,025.$$

$$x(10) = 10 \cdot L_0^{(3)}(y) + 15 \cdot L_1^{(3)}(y) + 17 \cdot L_2^{(3)}(y) + 20 \cdot L_3^{(3)}(y) =$$

$$-0.46875 + 4.59375 + 13.01563 - 0.5 = 16,64063.$$

ВМІП ЛЕКЦІЇ ПО ЧМ ПМ

## Лекция 10. Приближение функций интерполяционными многочленами. Численное дифференцирование (3ч. – 2ч. ЛК+1ч. ЛР)

1. Формулы численного дифференцирования для неравноотстоящих узлов.
2. Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих узлов.
3. Погрешность формул численного дифференцирования.

К численному дифференцированию приходится прибегать в том случае, когда функция  $f(x)$ , для которой нужно найти производную, задана **таблично** или же **функциональная зависимость  $x$  и  $f(x)$  имеет очень сложное аналитическое выражение**. В первом случае методы дифференциального исчисления неприменимы (поскольку производные берутся от непрерывных функций), а во втором случае их использование вызывает значительные трудности.

Задача численного дифференцирования ставится следующим образом: пусть на отрезке  $[a, b]$  рассматривается функция  $f(x)$ , имеющая непрерывную производную порядка  $n+1$ . Возьмем на  $[a, b]$   $n+1$  различных узлов (для удобства)  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  и пусть в них известны значения функции  $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$ . Требуется найти значение  $k$ -ой производной от функции  $f(x)$  в любой точке  $x \in [a, b]$ . Построим интерполяционный многочлен  $P_n(x)$  для функции  $f(x)$  степени  $n$  с погрешностью  $R(x)$ . Тогда запишем  $f(x) = P_n(x) + R(x)$ . Для производной порядка  $k$  имеем  $f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + R^{(k)}(x)$ . Если погрешность мала ( $R^{(k)}(x) \rightarrow 0$ ), то пренебрегая ею, получим формулу для приближенного вычисления производной  $f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x)$ . Пользоваться этой формулой целесообразно при небольших порядках  $k$ , когда  $k \leq n$ , так как все производные от  $P_n(x)$  порядка выше  $n$  тождественно равны нулю.

Получим некоторые явные формулы для численного вычисления производных при некоторых видах многочлена  $P_n(x)$ .

**Дифференцирование для равноотстоящих узлов.** Если узлы равноотстоящие, т.е.  $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ), то для вычисления производных удобно пользоваться, например, первой интерполяционной формулой Ньютона. Пусть  $f(x) \approx P_n(x)$  (см. формулу (2.42))

$$P_n(x(q)) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots$$

где  $q = \frac{x-x_0}{h}$ .

Чтобы легче было брать производные, перепишем эту формулу, раскрыв скобки

$$P_n(x(q)) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \dots$$

Продифференцируем последнее равенство, получим выражение первой производной. Учитывая, что  $\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dP}{dq} \left( \frac{dq}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{x-x_0}{h} \right) = \frac{1}{h} \frac{d}{dx} (x-x_0) = \frac{1}{h} \right)$ , будем иметь

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12} \Delta^4 y_0 + \dots) \quad (2.62)$$

Далее для второй производной будем иметь

$$P_n^{(2)}(x) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 + (q-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots) \quad (2.63)$$

Аналогично вычисляются производные высших порядков. Если производная вычисляется в узловой точке, то формулы упрощаются. Например, если  $x = x_0$ , то  $q = 0$  и для первой и второй производной получим

$$\begin{aligned} P_n^{(1)}(x_0) &= \frac{1}{h} (\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \dots), \\ P_n^{(2)}(x_0) &= \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \dots). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Так как  $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)\dots(q-n)f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$  (остаточный член формулы Ньютона), то, считая, что  $f(x) \in C_{[a,b]}^{n+2}$  (функция непрерывна на  $[a,b]$  с производной  $n+2$  порядка), получим  $\left( \frac{dR_n}{dx} = \frac{dR_n}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dR_n}{dq} \right)$

$$R_n^{(1)}(x) = \frac{h^n}{(n+1)!} \cdot \left( f^{(n+1)}(\xi) \frac{d}{dq} [q(q-1)\dots(q-n)] + q(q-1)\dots(q-n) \frac{d}{dq} f^{(n+1)}(\xi) \right).$$

В узлах интерполирования последняя формула примет вид (используем для вывода этой формулы формулу Ньютона в виде (2.42))

$$R_n^{(1)}(x_i) = (-1)^{n-i} \frac{h^n i!(n-i)!}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (2.65)$$

**Дифференцирование для неравноотстоящих узлов.** Для случая неравноотстоящих узлов удобно пользоваться формулами Лагранжа или Ньютона для неравноотстоящих узлов.

Формула Лагранжа имеет вид (2.9)

$$L_n(x) = \omega_n(x) \cdot \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\omega_n^{(1)}(x_i)},$$

где  $\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ .

Тогда первая производная запишется в форме

$$L_n^{(1)}(x) = \omega_n^{(1)}(x) \cdot \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\omega_n^{(1)}(x_i)} - \omega_n(x) \cdot \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x-x_i)^2 \omega_n^{(1)}(x_i)}. \quad (2.66)$$

Учитывая, что

$$\omega_n^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^n (x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n) = \omega_n(x) \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{x-x_i},$$

(можно рассмотреть для  $n=2$ :  $\omega_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ ,  
 $\omega_2^{(1)}(x) = (x-x_0)'[(x-x_1)(x-x_2)] + (x-x_0)[(x-x_1)(x-x_2)]' =$   
 $[(x-x_1)(x-x_2)] + (x-x_0)'[(x-x_1)(x-x_2)] + (x-x_1)(x-x_2)]' =$

$$[(x-x_1)(x-x_2)] + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1) \cdot )$$

Формулу (2.66) можно переписать в ином виде. Итак, первая производная с использованием формулы Лагранжа будет иметь вид

$$L_n^{(1)}(x) = \omega_n(x) \cdot \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{x-x_k} \cdot \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\omega_n^{(1)}(x_i)} - \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x-x_i)^2\omega_n^{(1)}(x_i)} \right).$$

Поскольку вычисления производных с использованием этой формулы несколько громоздко, то на практике более удобно пользоваться формулой Ньютона (2.29)

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x-x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \\ + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \\ + \dots + f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Для построения формул численного дифференцирования введем следующие обозначения  $\alpha_0 = x - x_0$ ,  $\alpha_1 = x - x_1$ , ...,  $\alpha_n = x - x_n$ , т.е.

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot \alpha_0 + f(x_0, x_1, x_2) \cdot \alpha_0 \alpha_1 + f(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 + \dots \\ + f(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \cdot \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}.$$

Для вычисления первой производной проведем вспомогательные вычисления

$$(f(x_0, x_1) \cdot \alpha_0)'_x = f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0)'_x = f(x_0, x_1), \\ (\alpha_0 \cdot \alpha_1)'_x = \alpha'_0 \cdot \alpha_1 + \alpha_0 \cdot \alpha'_1 = \alpha_0 + \alpha_1, \text{ и т. д.}$$

Тогда первая производная запишется

$$P_n^{(1)}(x) = f(x_0, x_1) + f(x_0, x_1, x_2)(\alpha_0 + \alpha_1) + \\ + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_2) + \dots + \\ + f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+1} \dots \alpha_{n-1}. \quad (2.67)$$

Для вычисления второй производной проведем вспомогательные вычисления

$$f(x_0, x_1)'_x = 0, \\ (f(x_0, x_1, x_2)(\alpha_0 + \alpha_1))'_x = f(x_0, x_1, x_2) \cdot (\alpha_0 + \alpha_1)'_x = f(x_0, x_1, x_2) \cdot [\alpha'_0 + \alpha'_1] = \\ = 2 \cdot f(x_0, x_1, x_2), \quad \text{и т. д.}$$

Вторая производная примет вид

$$f^{(2)}(x) \approx P_n^{(2)}(x) = 2! \cdot (f(x_0, x_1, x_2) + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) + \dots). \quad (2.68)$$

Аналогичным образом можно вычислить производные более высокого порядка.

**Пример 2.7.** Функция  $y = f(x)$  задана таблично

x	1	2	3	4
y	3	7	19	42

Требуется найти значение 1-ой и 2-ой производных в точке  $x=1$ .

**Решение.**

Т.к.  $x=1$  – узел интерполяции, то для вычисления производных можно воспользоваться упрощенной формулой (2.64). Для применения этой формулы составим таблицу конечных разностей:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	3	4	8	3
2	7	12	11	
3	19	23		
4	42			

Поскольку шаг  $h=1$ , находим значение первой и второй производных функции в точке  $x=1$ :

$$f^{(1)}(x_0) = \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} \right),$$

$$f^{(2)}(x_0) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0).$$

$$f^{(1)}(1) = \frac{1}{1} \left[ 4 - \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right] = 4 - 4 + 1 = 1,$$

$$f^{(2)}(1) = \frac{1}{1^2} [8 - 3] = 5.$$

**Погрешность формул численного дифференцирования.** Рассмотрим два случая: когда  $\bar{x} \notin [a, b]$  и  $\bar{x} \in [a, b]$ ,  $\bar{x}$  – точка, в которой производится оценка.

1. Пусть точка  $\bar{x} \notin [a, b]$ , т.е. точка  $\bar{x}$  не принадлежит минимальному отрезку  $[a, b]$ , содержащему узлы интерполирования, то остаточный член может быть представлен простым выражением. Для этого рассмотрим многочлен

$$Q(x) = L_n(x) + k\omega_n(x),$$

где  $k = \text{const}$ .

Он совпадает с функцией  $f(x)$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (т.е.  $f(x_i) = Q(x_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ ). Подберём постоянную  $k$  так, чтобы в точке  $\bar{x}$ , для которой производится оценка, имело место равенство

$$Q^{(k)}(\bar{x}) = L_n^{(k)}(\bar{x}) + k\omega_n^{(k)}(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x}).$$

Это возможно, так как все корни уравнения  $\omega_n^{(k)}(x) = 0$  лежат в наименьшем отрезке, содержащем  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Рассмотрим вспомогательную функцию  $\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - k\omega_n(x)$ . Функция  $\varphi(x)$  имеет  $n+1$  нулей в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  по построению. На основании теоремы Ролля  $\varphi^{(1)}(x)$  будет иметь  $n$ ,  $\varphi^{(2)}(x)$  –  $n-1$  и  $\varphi^{(k)}(x)$  будет иметь  $n-k+1$  нулей внутри отрезка  $[a, b]$ . Но в силу выбора постоянной  $k$  она обратится в нуль и в точке  $\bar{x}$ , лежащей вне этого отрезка, т.е.  $\varphi^{(k)}(\bar{x}) = 0$ . Тогда  $\varphi^{(k)}(x)$  будет иметь  $n-k+2$  нулей и, следовательно,  $\varphi^{(n+1)}(x)$  обращается в нуль, по крайней мере, в одной точке  $\xi$  ( $\xi \notin [a, b]$ ).

Но

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(\xi) - k\omega_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k\omega_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0$$



Отсюда

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

и получим выражение для погрешности дифференцирования (выражение остаточного члена)

$$R_n^{(k)}(f) = f^{(k)}(\bar{x}) - L_n^{(k)}(\bar{x}) = k \cdot \omega_n^{(k)}(\bar{x}) = \frac{\omega_n^{(k)}(\bar{x})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (2.69)$$

2. Пусть точка  $\bar{x} \in [a, b]$ , т.е. точка  $\bar{x}$  принадлежит минимальному отрезку  $[a, b]$ , содержащему узлы интерполирования, то остаточный член может быть представлен в виде подобном (2.69). Итак, пусть  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$  и  $\bar{x} \in [x_0, x_n]$ . Разность  $f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x)$  обращается на отрезке  $[x_0, x_n]$  в нуль, по крайней мере,  $n - k + 1$  раз. Пусть это будут точки  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-k}$  (так как  $k$ -я производная отнимает  $k$  нулей). Легко видеть, что  $x_i < \varepsilon_i < x_{i+k}$ . Функция

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) - c(x - \varepsilon_0)(x - \varepsilon_1) \dots (x - \varepsilon_{n-k}) = \\ &= f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) - c\tilde{\omega}(x), \end{aligned} \quad (2.69')$$

будет обладать этим свойством (т.е. обращаться в нуль на  $[x_0, x_n]$ ), как бы мы ни выбирали постоянную  $c$ .

Пусть  $\bar{x} \neq \varepsilon_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - k$ . Тогда константу  $c$  можно подобрать так (т.е. чтобы  $\tilde{\omega}(\bar{x}) \neq 0$ ), чтобы  $\Psi(\bar{x}) = 0$ . При этом функция  $\psi(x)$  на отрезке  $[x_0, x_n]$  будет обращаться в нуль по крайней мере  $n - k + 1$  раз. Проводя такие же рассуждения, что и для функции  $\varphi^{(k)}(x)$ , мы придём к выводу, что найдётся такая точка  $\xi \in [x_0, x_n]$ , что  $\psi^{(n-k+1)}(\xi) = 0$ , т.е.  $\Psi^{(n-k+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c(n - k + 1)! = 0$ ,

$$\text{и } c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n - k + 1)!}.$$

Таким образом, для оценки погрешности, используя формулу (2.69'), получим

$$R_n^{(k)}(f) = f^{(k)}(\bar{x}) - L_n^{(k)}(\bar{x}) = \frac{\tilde{\omega}_1(\bar{x}) f^{(n+1)}(\xi)}{(n - k + 1)!}. \quad (2.70)$$

При использовании формул численного дифференцирования может произойти существенная потеря точности. Так, с ростом порядка производной обычно резко падает точность численного дифференцирования. Поэтому на практике редко применяют формулы численного дифференцирования для производных выше второго порядка.

## Лекция 11. Приближение функций сплайнами (3ч. – 2ч. ЛК+1ч. ЛР)

1. Сплайн-интерполирование. Постановка задачи. Интерполяционный линейный, параболический, кубический сплайны.
2. Интерполяционный кубический сплайн. Построение кубического сплайна. Определение коэффициентов сплайна. Типы граничных условий. Примеры.
3. Погрешность приближения сплайнами.

**Определение интерполяционного сплайна.** Аналитические приближения требуют довольно много хороших свойств функции, в частности существование производных высокого порядка, что не всегда имеет место на практике. К тому же далекие от точки интерполирования узлы мало влияют на значение функции в этой точке. Поэтому естественно поступить следующим образом: разбить весь отрезок интерполирования  $[a, b]$  на участки  $[x_i, x_{i+1}]$  и на каждом из этих участков вычислять свою интерполяционную функцию, определенным образом «сшивая» их в узлах. В том случае, когда эти функции являются многочленами, **интерполирование называется кусочно-полиномиальным.**

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частей  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ;  $x_0 = a, x_n = b$ . Обозначим это разбиение через  $\Delta$ . Назовем **сплайном**  $S_m^\Delta(f, x)$  **порядка  $m$**  функцию, являющуюся многочленом степени  $m$  на каждом из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$

$$S_m^\Delta(f, x) = P_{im}(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{im}x^m \text{ при } x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (2.71)$$

и удовлетворяющую **условиям непрерывности производных до порядка  $m-1$  во внутренних точках**  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$

$$P_{im}^k(x_i) = P_{i+1,m}^k(x_i), \quad k = 0, 1, \dots, m-1; \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.27)$$

и **условиям совпадения значений сплайна и функции во всех узлах**  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$

$$P_{im}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.73)$$

В этой задаче необходимо определить  $m+1$  коэффициент для каждого из  $n$  уравнений, то есть, всего  $n(m+1)$  коэффициентов  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 0, 1, \dots, m$ . Условия непрерывности дают  $(n-1)m$  уравнений; условия совпадения –  $n+1$  уравнение: всего имеем  $n(m+1) - m + 1$  уравнений. Остальные  $m-1$  уравнений выбираются исходя из некоторых дополнительных условий.

И так, **сплайном** называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на заданном отрезке  $[a, b]$ , а на каждом частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  является некоторым алгебраическим многочленом. Максимальная по всем отрезкам степень многочленов называется **степенью сплайна**, а разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной производной на  $[a, b]$  называется **дефектом сплайна**. Сплайн, который принимает в узлах те же значения, что и функция  $f(x)$  называется

**интерполяционным.** На практике широко используются сплайны третьей степени –  $S_3(x)$ . Такие сплайны называются **кубическими**.

Пусть  $k_i = S_3^{(1)}(x_i)$  – наклоны сплайна в точке  $x_i$ . Если заданы значения  $f_i, f_{i+1}$  и  $k_i, k_{i+1}$  на  $[x_i, x_{i+1}]$  и  $h_i = x_{i+1} - x_i$ , то интерполяционный сплайн имеет вид

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2(2(x - x_i) + h_{i+1})}{h_{i+1}^3} f_i + \frac{(x - x_i)^2(2(x_{i+1} - x) + h_{i+1})}{h_{i+1}^3} f_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_i)}{h_{i+1}^2} k_i + \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})}{h_{i+1}^2} k_{i+1}. \quad (2.74)$$

**О способах задания сплайнов.** Существует несколько способов задания интерполяционных сплайнов. Пусть узлы интерполирования – равноотстоящие.

**Способ 1.** Определяя наклоны  $k_i$  по формулам

$$k_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.75)$$

$$k_0 = \frac{4f_1 - f_2 - 3f_0}{2h}, \quad k_n = \frac{3f_n + f_{n-2} - 4f_{n-1}}{2h}, \quad (2.76)$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$ , кубический сплайн можно записать в виде (2.74), причём  $h_{i+1} = h$ .

**Способ 2.** Если известны значения производной  $f_i^{(1)}$ , то полагаем  $k_i = f_i^{(1)}$ . Затем сплайн записывается в форме (2.74).

Первый и второй способы являются локальными и гарантируют непрерывность первых производных сплайна  $S_3^{(1)}(x)$  в узлах  $x_i$  и дефект равен 2.

**Способ 3.** Будем строить сплайн  $S_3(x)$  так, чтобы выполнялись условия

1)  $S_3(x) \in C_{[a,b]}^2$ ;

2) на каждом из отрезков сплайн является многочленом третьей степени;

3) в узлах выполняются условия  $S_3(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  – условия совпадения (2.73);

4) удовлетворяет некоторым граничным условиям (определим их позже).

Будем искать сплайн на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  в виде

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3. \quad (2.77)$$

Из условия 3) следует, что  $S_i(x_i) = a_i = f_i$ , и  $a_0 = f_0$ . Дифференцируя получим

$$b_i = S_i^{(1)}(x_i); \quad c_i = S_i^{(2)}(x_i); \quad d_i = S_i^{(3)}(x_i);$$

Из условия непрерывности функции:  $S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$ , следует, что

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3,$$

и так как  $h_i = x_i - x_{i-1}$ , тогда можно записать

$$a_i = a_{i+1} - b_{i+1}h_{i+1} + \frac{c_{i+1}}{2}h_{i+1}^2 - \frac{d_{i+1}}{6}h_{i+1}^3,$$

учитывая интерполяционность, приходим к уравнению

$$f_i - f_{i-1} = h_i b_i - \frac{c_i}{2}h_i^2 + \frac{d_i}{6}h_i^3, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{во внутренних точках}) \quad (2.78)$$

Из условия непрерывности первой производной (2.72):  $S_i^{(1)}(x_i) = S_{i+1}^{(1)}(x_i)$  следует, что

$$b_i = b_{i+1} - c_{i+1}h_{i+1} + \frac{d_{i+1}}{2}h_{i+1}^2, \quad \text{или} \\ c_i h_i - \frac{d_i}{2}h_i^2 = b_i - b_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (2.79)$$

Из условия непрерывности второй производной (2.72):  $S_i^{(2)}(x_i) = S_{i+1}^{(2)}(x_i)$  следует, что

$$c_i = c_{i+1} - d_{i+1}h_{i+1}, \quad \text{или} \\ c_i - c_{i-1} = d_i h_i, \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.80)$$

Уравнения (2.78) – (2.80) – образуют систему из  $3n-2$  уравнений относительно  $b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$  –  $3n$  неизвестных. Дополняя эту систему условиями на границе для  $S_3(x)$ , получим полную систему из  $3n$  уравнений.

**Типы граничных условий.** Рассмотрим различные типы граничных условий.

1. Пусть заданы значения  $f_0^{(2)} = c_0$  и  $f_n^{(2)} = c_n$ . Из уравнений (2.78) – (2.80) получается система

$$\begin{cases} c_0 = f_0^{(2)} \\ h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \\ c_n = f_n^{(2)} \end{cases} \quad (2.81)$$

Эта система имеет диагональное преобладание и может быть эффективно решена методом трехточечной прогонки. Затем определяются остальные неизвестные

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если  $f^{(2)}(a) = f^{(2)}(b) = 0$ , то в системе (2.81) граничные условия будут  $c_0 = 0, c_n = 0$ .

2. Если на границе заданы значения первых производных  $f_a^{(1)} = f_0^{(1)} = b_0$  и  $f_b^{(1)} = f_n^{(1)} = b_n$ , то систему (2.78) – (2.80) можно привести к виду

$$\begin{cases} b_0 = f_0^{(1)} \\ 2h_{i+1}b_{i-1} + 4(h_i + h_{i+1})b_i + 2h_i b_{i+1} = 6\left(\frac{h_i}{h_{i+1}}(f_{i+1} - f_i) + \frac{h_{i+1}}{h_i}(f_i - f_{i-1})\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \\ b_n = f_n^{(1)} \end{cases} \quad (2.82)$$

Эта система также эффективно может быть решена методом прогонки. Для равномерной сетки  $h_i = h_{i+1}$ , для внутренних точек получим

$$b_{i-1} + 4b_i + b_{i+1} = 3 \left( \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{h} \right). \quad (2.83)$$

Если эти граничные условия использовать при решении системы (2.81), то на границе дополняем уравнением

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}c_1 &= \frac{2}{h_1} \left( \frac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0^{(1)} \right), \\ \frac{1}{3}c_{n-1} + \frac{2}{3}c_n &= \frac{2}{h_n} \left( f_n^{(1)} - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n} \right). \end{aligned} \quad (2.84)$$

3. Если на границе заданы значения только функции  $f_0$  и  $f_n$ , то можно решить систему (2.82) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{6h} (-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3), \\ b_n &= \frac{1}{6h} (11f_n - 18f_{n-1} + 9f_{n-2} - 2f_{n-3}). \end{aligned} \quad (2.85)$$

4. Пусть  $f(x)$  периодическая функция с периодом  $b-a$ , тогда следует считать, что  $f_0 = f_n$ ,  $S_3^{(1)}(a) = S_3^{(1)}(b)$  и  $S_3^{(2)}(a) = S_3^{(2)}(b)$ . Если использовать систему (2.81), то ее можно дополнить краевыми условиями

$$\begin{aligned} c_0 &= c_n, \\ c_1 h_1 + 2(h_n + h_1)c_n + c_{n-1} h_n &= 6 \left( \frac{f_1 - f_n}{h_1} - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n} \right). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Для равномерной сетки из (2.86) получим уравнение

$$c_1 + 4c_n + c_{n-1} = \frac{6}{h^2} (f_1 - 2f_n + f_{n-1}).$$

Если использовать систему (2.82), то ее нужно дополнить условиями

$$\begin{aligned} b_0 &= b_n, \\ \frac{f_1 - f_0}{h_1^2} - \frac{f_{n-1} - f_0}{h_n^2} &= \frac{1}{3h_1} (2b_0 + b_1) + \frac{1}{3h_n} (2b_0 + b_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Для равномерной сетки из (2.87) получим уравнение

$$\frac{3(f_1 - f_{n-1})}{h} = b_1 + 4b_0 + b_{n-1}.$$

Если решается система (2.81) и получены значения  $c_i$ , то кубический сплайн можно сразу записать в виде на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$

$$\begin{aligned} S_3(x) &= c_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + c_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + (f_{i-1} - \frac{c_{i-1}h_i^2}{6}) \frac{x_i - x}{h_i} + \\ &+ (f_i - \frac{c_i h_i^2}{6}) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

**О погрешности приближения сплайнами.** Следующая теорема дает ответ о погрешности приближения сплайнами.

**Теорема 2.2.** Если  $f(x) \in C_{k+1}[a, b]$ ,  $0 \leq k \leq 3$ , то интерполяционный сплайн  $S_3(x)$ , построенный способами 2 или 3, удовлетворяет неравенству

$$\max_{[x_i, x_{i+1}]} |f^{(m)}(x) - S_3(x)| \leq ch^{k+1-m} \max_{[a, b]} |f^{(k+1)}(x)|,$$

где  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $m = 0, 1, \dots, k$ ,  $c$  — не зависящая от  $h, i, f$  постоянная. Если  $f(x) \in C_4[a, b]$ , то можно получить  $c = 1$ . Если сплайн  $S_3(x)$  построен по способу 1, то данная теорема справедлива при  $0 \leq k \leq 2$ .

ВМИП Лекции по ЧМ ПМ

## Лекция 12. Равномерные приближения (3ч. – 2ч. УСР+1ч. ЛР)

1. Постановка задачи, основные понятия, определения и теоремы. Понятие о наилучшем равномерном приближении непрерывных функций обобщенными многочленами.

2. Алгебраические многочлены наилучшего равномерного приближения.

3. Тригонометрические многочлены наилучшего приближения.

4. Приближенное построение алгебраических многочленов наилучшего приближения.

Материал для изучения находится в файле «УСР по ЧМ.ПМ.pdf».

### Лекция 13. Среднеквадратичные приближения (3ч. – 2ч. УСР+1ч. ЛР)

1. Постановка задачи, основные понятия, определения и теоремы. Приближения в гильбертовом пространстве.

2. Среднеквадратичные приближения функций алгебраическими многочленами.

3. Среднеквадратичные приближения функций тригонометрическими многочленами.

4. Приближение функций, заданных таблицей, по методу наименьших квадратов.

5. Приближения по методу наименьших квадратов алгебраическими многочленами.

Материал для изучения находится в файле «УСР по ЧМ ПМ.pdf».



### Тема 3. Приближенное вычисление интегралов

#### Лекция 14. Интерполяционные квадратурные правила (2ч. ЛК)

1. О форме, придаваемой интегралу при вычислениях. Квадратурная сумма и связанные с ней задачи.
2. Общая квадратурная формула.
3. Теорема о точности квадратурной формулы.
4. Интерполяционные квадратурные формулы.

Если для функции  $f(x)$  определенной на отрезке  $[a, b]$  можно найти примитивную  $F(x)$  то определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  можно вычислить по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Но, как правило, найти примитивную  $F(x)$  через элементарные функции не удастся. Поэтому приходится прибегать к приближенному вычислению интеграла.

Пусть  $[a, b]$  – любой отрезок числовой оси, и рассматривается интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ . Ставится задача: найти его приближённое значение по  $n$  значениям  $F(x_i)$  функции  $F$  в точках  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Формулы для вычисления интегралов называют **квадратурными**.

Многие правила приближённых квадратур основаны на замене интегрируемой функции  $F$  на всём отрезке  $[a, b]$  или на его частях на более простую функцию  $\varphi$ , близкую к  $F$ , легко интегрируемую точно и принимающую в узлах  $x_i$  те же значения  $F(x_i)$ , что и  $F$ . В качестве такой функции берут алгебраический или тригонометрический многочлен, либо дробно-рациональную функцию.

Когда отрезок интегрирования конечный и интегрируемая функция  $F$  имеет высокую гладкость, то можно рассчитывать хорошо приблизить её многочленом невысокой степени. Если же сама функция  $F$  или её производные невысоких порядков имеют особенности или даже обращаются в  $\infty$ , то это затруднит приближение  $F$  или сделает его вообще невозможным. В этом случае мы должны будем заранее освободиться от таких особенностей путём их выделения. Делается это при помощи разложения  $F$  на два сомножителя  $F(x) = p(x)f(x)$ , где  $p(x)$  имеет такие же особенности, как и  $F(x)$ , а  $f(x)$  – есть достаточно гладкая функция, и интеграл рассматривается в форме  $\int_a^b p(x)f(x)dx$ .

Такое же представление применяется и при вычислении несобственных интегралов вида  $\int_a^{\infty} F(x)dx$ . Причём,  $F$  целесообразно разложить на множители  $F(x) = p(x)f(x)$ , из которых первый  $p(x)$  характеризует закон убывания  $F$  при  $x \rightarrow \infty$ , а  $f(x)$  — является гладкой функцией, допускающей хорошее приближение алгебраическими многочленами или рациональными функциями.

Функция  $p(x)$  называется **весовой функцией** или **весом**. При построении определённого квадратурного правила она считается фиксированной и  $p(x) > 0$ .

**Квадратурная сумма и связанные с ней задачи.** Будем строить приближённые формулы вычислений вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad x_k \in [a, b]. \quad (3.1)$$

Числа  $A_k$  называются **квадратурными коэффициентами**,  $x_k$  — **квадратурными узлами**, а правая часть формулы — **квадратурной суммой**.

Формула (3.1) содержит  $2n+1$  параметров:  $n, A_k, x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Их следует выбирать так, чтобы (3.1) давала, возможно, лучший результат при интегрировании избранного класса функций  $f$ . Роль  $n$  — очевидна: чем больше  $n$ , тем больше слагаемых в квадратурной сумме, и тем большей точности можно достичь путём выбора  $A_k$  и  $x_k$ . Поэтому при построении формулы число  $n$  считают фиксированным и рассматривают задачу о выборе  $A_k$  и  $x_k$ . В различных квадратурных методах одно из множеств: либо множество коэффициентов  $A_k$ , либо множество узлов  $x_k$  также может быть зафиксированным. Правом выбора их обычно пользуются для следующих целей.

#### а) Увеличение степени точности

Говорят, что квадратурная формула (3.1) имеет степень точности  $m$ , если она является точной для функций  $g_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), т.е.

$$\int_a^b p(x)g_i(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k g_i(x_k)$$

и не является точной для  $g_{m+1}(x)$ .

Можно стремиться к тому, чтобы при помощи выбора параметров  $A_k$  и  $x_k$  сделать степень точности формулы (3.1) наивысшей возможной. Такие формулы впервые были рассмотрены Гауссом и их часто называют формулами **наивысшей степени точности**.

#### б) Минимизация погрешности

Остаточный член формулы (3.1) имеет вид

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (3.2)$$

За величину, характеризующую точность формулы на множестве  $F$  функций  $f$  может быть принята

$$\sup_f |R_n(f)| = M(A_1, \dots, A_n; x_1, \dots, x_n).$$

Путём выбора узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$  можно добиться, чтобы величина  $M$  имела бы наименьшее значение.

### в) Упрощение вычислений

Можно при помощи выбора параметров  $A_k$  и  $x_k$  стремиться сделать, возможно, более простыми вычисления по формуле (3.1), например, взять равноотстоящими узлы, или взять равные коэффициенты.

**Общая квадратурная формула.** Предположим, что узлы  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) выбраны и являются равноотстоящими. При построении квадратурной формулы (3.1) мы можем выбирать лишь коэффициенты  $A_k$ . Выполним интерполирование  $f(x)$  по её значениям в узлах  $x_k$  при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа степени  $n-1$ , т. е.

$$f(x) = L_n(x) + r(x),$$

где  $L_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k)$ ,  $\omega(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$ ,  $r(x)$  – погрешность интерполирования.

Тогда

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)L_n(x)dx + \int_a^b p(x)r(x)dx. \quad (3.3)$$

Вычислим первый интеграл в правой части

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)f(x)dx &\approx \int_a^b p(x)L_n(x)dx = \int_a^b p(x) \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k)dx = \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b \frac{p(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \end{aligned}$$

Таким образом, интерполяционная квадратурная формула принимает вид

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx. \quad (3.4)$$

Ее погрешность (3.2) определяется следующим образом

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_a^b p(x)r(x)dx. \quad (3.5)$$

**Теорема о точности квадратурной формулы.** Интерполяционная формула (3.4) характеризуется следующей теоремой о степени точности.

**Теорема 3.1.** Для того чтобы квадратурная формула (3.4) была точной для алгебраических многочленов степени не больше  $n$ , необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть (3.4) является точным для любых многочленов степени не выше  $n$ . Возьмём функцию  $f(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} = \omega_k(x)$ . Это есть многочлен степени  $n-1$  (т.е. не выше  $n$ ), и если формула (3.4) верна для любых многочленов степени  $n-1$ , то она должна быть точной и для  $\omega_k(x)$ . Поэтому верны равенства

$$\int_a^b p(x)\omega_k(x)dx = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx = \sum_{i=1}^n A_i \omega_k(x_i) = A_k,$$

так как,  $\omega_k(x_i)=0$ ,  $i \neq k$ ,  $\omega_k(x_k)=1$ , то формула (15.4) действительно является интерполяционной, так как её коэффициенты имеют значения, указанные в (3.4).

**Достаточность.** Пусть  $f$  – любой многочлен степени не выше  $n$  и квадратурное правило интерполяционное. Убедимся в том, что для него равенство (3.4) будет выполняться точно. Интерполируем  $f$  по значениям в узлах  $x_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ). Интерполирование будет точным

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k).$$

Кроме того, если  $A_k$  имеют значения, указанные в (10.4), то верны равенства

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b \frac{p(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

и, следовательно, равенство (10.4) для  $f(x)$  выполняется точно. Теорема доказана.

Если квадратурное правило является точным для всех многочленов степени  $n$ , то говорят, что оно имеет точность  $n$ . Из теоремы следует, что всякое квадратурное правило, степень которого не меньше  $n$ , является интерполяционным.

Остановимся на оценке погрешности. Если функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную порядка  $n$  на  $[a,b]$ , то на отрезке, содержащем точки  $x_1, x_2, \dots, x_n, x$ , существует точка  $\xi$  такая, что

$$r(x) = \frac{\omega(x)}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Тогда для (3.4)  $R_n(f)$  имеет место следующее выражение

$$R_n(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b p(x)\omega(x)f^{(n)}(\xi)dx.$$

Если же  $|f^{(n)}(x)| < M_n$ ,  $x \in [a,b]$ , то имеем оценку погрешности квадратуры

$$|R_n(f)| \leq \frac{1}{n!} M_n \int_a^b |p(x)\omega(x)| dx, \quad (3.6)$$

где  $M_n = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n)}(\xi)|$ .

## Лекция 15. Квадратурные правила для равноотстоящих узлов (3ч. – 2ч. ЛК+1ч. ЛР)

1. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.
2. Простейшие квадратурные формулы (прямоугольников, трапеций, Симпсона).
3. Правило Рунге оценки точности квадратурных формул и автоматический выбор шага интегрирования.

**Формулы Ньютона-Котеса.** Формулы для приближенного вычисления интегралов, которые получаются путём замены подынтегрального выражения интерполяционным многочленом Лагранжа с узлами, разбивающими промежуток интегрирования на равные части, называются формулами Ньютона-Котеса. Формулы Ньютона-Котеса различаются степенями использованных интерполяционных многочленов. Чтобы не иметь дело с многочленами высоких степеней, обычно разбивают промежуток интегрирования на отдельные участки, применяют формулы Ньютона-Котеса с невысокими степенями на каждом участке и потом складывают полученные результаты (что дает так называемые составные формулы).

Пусть узлы  $x_k$  – равноотстоящие. Построим интерполяционные квадратурные формулы, считая, что на отрезке  $[a, b]$  задано  $n+1$  равноотстоящих узлов  $x_k$ , таких, что  $x_0 = a$ ,  $x_k = x_{k-1} + h$ ,  $x_n = b$  и  $h = \frac{b-a}{n}$ . Введем новую переменную  $q = \frac{x-x_0}{h}$ . Тогда многочлен Лагранжа примет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} q(q-1)\dots(q-n)}{k!(n-k)!(q-k)} f(x_k).$$

Подставим это выражение в (10.3)  $\left( \int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)L_n(x)dx + \int_a^b p(x)r(x)dx \right)$ , получим

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} h^n}{k!(n-k)!} \int_0^n p(a+qh) \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-k} dq f(x_k) + R_n(f).$$

Пусть  $A_k = (b-a)B_k^n$ , тогда последняя формула переписывается в виде

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n f(x_k), \quad (3.7)$$

где

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n p(a+qh) \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-k} dq. \quad (3.8)$$

Квадратурные правила (3.7) называют **формулами Ньютона-Котеса**, а коэффициенты (3.8) – **коэффициентами Ньютона-Котеса**.

Для постоянной весовой функции  $p(x) \equiv 1$  формула Ньютона-Котеса имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n f(x_k), \quad (3.9)$$

а коэффициенты  $B_k^n$  определяются по формулам

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-k} dq. \quad (3.10)$$

Эти коэффициенты не зависят от промежутка интегрирования и могут быть вычислены раз и навсегда.

Если положить в (3.8)  $f(x) = 1$ , то получим

$$(b-a) = (b-a) \cdot \sum_{k=0}^n B_k^n \cdot 1,$$

и, следовательно,  $\sum_{k=0}^n B_k^n = 1$ .

Сравним  $B_k^n$  и  $B_{n-k}^n$ :

$$\frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-k} dq = \frac{(-1)^{n-(n-k)}}{n(n-k)!(n-(n-k))!} \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-n+k} dq.$$

Введем замену  $q-n = -t \Rightarrow q = -(t-n)$ ,  $q-1 = -(t-n+1) \dots \Rightarrow q-n+k = -(t-k)$ ,  $dq = -dt$ ,

$$B_{n-k}^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k} dt = B_k^n.$$

Коэффициенты  $B_k^n$  вычислены до  $n=20$ . С ростом  $n$  коэффициенты  $B_k^n$  по модулю неограниченно возрастают. При больших  $n$  формулы Ньютона-Котеса становятся малопригодными для вычислений, так как все значительнее сказывается неустранимая (возникающая из-за неточности исходной информации, например, неточности измерений) и вычислительная погрешность (возникающая из-за округлений). Выпишем значения коэффициентов  $B_k^n$  для некоторых значений  $n$ :

$$\begin{aligned} n=1, \quad B_0^1 &= B_1^1 = \frac{1}{2}; \\ n=2, \quad B_0^2 &= B_2^2 = \frac{1}{6}, B_1^2 = \frac{4}{6}; \\ n=3, \quad B_0^3 &= B_3^3 = \frac{1}{8}, B_1^3 = B_2^3 = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

**Замечание 3.1.** Формула (3.10) имеет степень точности  $n$ , если число узлов её  $n+1$  — является чётным, и степень  $n+1$ , если число узлов её  $n+1$  — является нечётным.

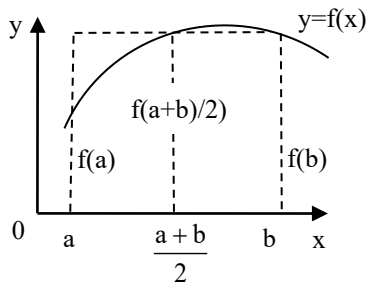
**Простейшие формулы Ньютона-Котеса.** Для повышения точности интегрирования отрезок  $[a, b]$  часто делят на несколько частей, затем применяют избранную квадратурную формулу к каждой отдельной части и результаты складывают (в результате получают составные (обобщенные) формулы численного интегрирования). Этот метод является общим, и им можно пользоваться при применении всякой квадратурной формулы. Для многих формул интерполяционных квадратур погрешность  $R_n(f)$  зависит от величин отрезка интегрирования следующим образом

$$R_n(f) = (b-a)^k C(a, b), \quad (3.11)$$

где  $C(a, b)$  – медленно изменяющаяся функция от  $a$  до  $b$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Такая зависимость показывает, что если мы уменьшим отрезок интегрирования в  $m$  раз, то  $R_n(f)$  при этом уменьшится приблизительно в  $m^k$  раз. Для вычисления интеграла по всему отрезку  $[a, b]$  разделим его на  $m$  равных частей и вычислим при помощи выбранной формулы интегралы по всем частичным отрезкам. В каждом случае погрешность будет приблизительно в  $m^k$  раз меньше, чем (3.11). При сложении всех таких интегралов получится результат, погрешность которого будет приблизительно в  $m^{k-1}$  раз меньше, чем погрешность (3.11), когда формула применяется для вычисления интеграла по всему отрезку  $[a, b]$ . Если  $k > 1$ , то произойдёт уменьшение погрешности тем больше, чем больше  $k$ . Описанный способ увеличения точности применим сейчас к простейшим формулам Ньютона-Котеса.

**Формула прямоугольников (средних).** В случае, когда  $n=0$  функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  заменяется интерполяционным многочленом нулевого порядка, построенным по значениям  $f(x)$  в средней точке  $x = \frac{a+b}{2}$ , т. е. функцией  $P_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  на отрезке  $[a, b]$ . Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(f). \quad (3.12)$$



(см. рисунок) Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции, выражаемой  $\int_a^b f(x) dx$ , заменяется площадью **прямоугольника** с основанием  $b-a$  и высотой  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ . Поэтому формулу (3.12) и называют формулой прямоугольника (средних прямоугольников).

Если  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  имеет производную второго порядка, то для остаточного члена  $R(f)$  можно записать простое выражение

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta), \text{ где } a \leq \eta \leq b.$$

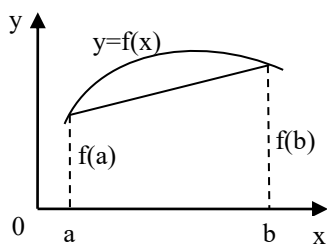
В целях повышения точности интегрирования разобьём отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей длины  $h = \frac{b-a}{n}$  и, применяя формулу (3.12) к каждому частичному отрезку. Просуммируем результаты по всем отрезкам, получим окончательную формулу прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left[ f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + \dots + f\left(a + \frac{(2n-1)h}{2}\right) \right] + R, \quad (3.13)$$

где погрешность определяется формулой

$$R_1 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (3.14)$$

Формулу (3.13) называют **обобщённой формулой прямоугольника**.



**Формула трапеций.** Пусть  $n=1$ , тогда линейное интерполирование выполняется по двум значениям  $f(a)$  и  $f(b)$ , принимаемым функцией  $f(x)$  на концах  $a$  и  $b$ , т. е. кривая  $y = f(x)$  заменяется хордой, соединяющей конечные точки кривой (см. рисунок).

Интеграл от интерполяционного многочлена даст площадь трапеции ABCD. Поэтому и соответствующая формула численного интегрирования получила название **формулы трапеций**. Площадь трапеции ABCD, очевидно, равна

$$\frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + R(f). \quad (3.15)$$

Если  $f''(x)$  – непрерывная функция на  $[a, b]$ , то для погрешности имеем

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \quad \eta \in [a, b]. \quad (3.16)$$

Для увеличения точности формулы трапеций (3.15), разделим отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей длины  $h = \frac{b-a}{n}$ . Рассмотрим частичный отрезок  $[a+kh, a+(k+1)h]$ . Для него получим

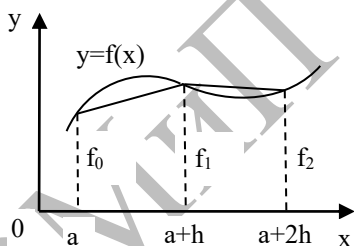
$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_k + f_{k+1}) + R_k, \quad f_k = f(a+kh),$$

и согласно (3.16)

$$R_k = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_k), \quad a+kh \leq \eta_k \leq a+(k+1)h.$$

Сумма интегралов по всем частичным отрезкам даёт **обобщённую формулу трапеций**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[ \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right] + R, \quad (3.17)$$



где

$$\begin{aligned} R &= R_0 + R_1 + \dots + R_{n-1} = -\frac{h^3}{12} [f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \dots + f''(\eta_{n-1})] = \\ &= -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \dots + f''(\eta_{n-1})}{n}, \quad a+kh \leq \eta_k \leq a+(k+1)h. \end{aligned}$$

Величина  $\frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \dots + f''(\eta_{n-1})}{n}$  есть среднее

арифметическое значение, составленное из  $n$  значений второй производной  $f''$  в  $n$  точках отрезка  $[a, b]$ . Считая ее непрерывной функцией на  $[a, b]$ , мы можем выбрать такую точку  $\xi \in [a, b]$ , что

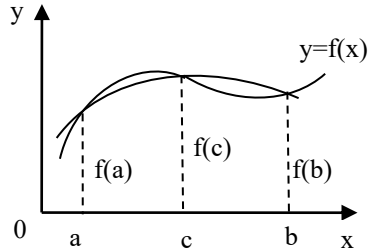
$$\frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \dots + f''(\eta_{n-1})}{n} = f''(\xi),$$

а значит,

$$R_1 = \frac{nh^3}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} \cdot f''(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (3.18)$$



**Формула Симпсона (парабол).** Пусть  $n=2$  и интерполируется функция  $f(x)$  по трём точкам  $a$ ,  $\frac{a+b}{2}=c$ ,  $b$  в которых известны её значения. Интерполяционный многочлен будет иметь вторую степень. Геометрически это означает, что мы проводим параболу через конечные и среднюю точки кривой (см. рисунок).



Квадратурное правило будет иметь вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)]. \quad (3.19)$$

Эта формула называется также формулой **Симпсона**.

Погрешность формулы Симпсона имеет вид

$$R(f) = -\frac{1}{90} \left( \frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a, b],$$

$f^{(4)}(x)$  – непрерывная функция на отрезке  $[a, b]$ .

Формула точна для многочленов до третьей степени включительно, так как в этом случае  $f^{(4)}(x) \equiv 0$ .

Формула Симпсона также может быть применена не сразу ко всему отрезку, а к отдельным частям его. Разделим  $[a, b]$  на **чётное число**  $n$  ( $n=2m$ ) равных частей длины  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$  и возьмём удвоенный частичный отрезок  $[a+(k-1)h, a+(k+1)h]$ . Тогда, учитывая, что  $f_k = f(a+kh)$ , имеем

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x)dx = \frac{h}{3} (f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}) + R_k.$$

Применив последнее равенство ко всем удвоенным отрезкам  $[a, a+2h]$ ,  $[a+2h, a+4h]$ , ... , и сложив почленно результаты, построим общее правило парабол или правило Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n} [f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1})] + R(f), \quad (3.20)$$

и

$$R(f) = -\frac{1}{90} h^5 [f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_3) + \dots + f^{(4)}(\eta_{n-1})].$$

Если функция  $f^{(4)}(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то существует такая точка  $\xi$ , что

$$\frac{2}{n} [f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_3) + \dots + f^{(4)}(\eta_{n-1})] = f^{(4)}(\xi)$$

и для погрешности  $R(f)$  получим выражение

$$R_2 = -\frac{mh^5}{90} \cdot f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^4(b-a)}{180} \cdot f^{(4)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (3.21)$$

**Замечание 3.2.** Остаточный член формулы средних (3.14) примерно вдвое меньше, чем у формулы трапеций (3.18). Поэтому если значения функции одинаково легко определяются в любых точках, то лучше вести

расчет по более точной формуле средних. Формулу трапеций применяют в тех случаях, когда функция задана только в узлах сетки, а в серединах интервалов неизвестна.

**Замечание 3.3.** Знаки главного члена погрешности у формул трапеций и средних разные ((3.14) и (3.18)). Поэтому, если есть расчеты по обеим формулам, то точное значение интеграла лежит, как правило, в вилке между ними. Деление этой вилки в отношении 2:1 дает уточненный результат, соответствующий формуле Симпсона.

При пользовании любой приближенной формулой важно иметь представление о ее точности. В этой лекции для каждой из полученных формул мы дали выражения остаточных членов. Однако эти остаточные члены содержат производные высоких порядков, которые в большинстве практических случаев или не могут быть оценены или могут быть оценены очень грубо, так что фактическая погрешность будет значительно меньше, чем полученная ее оценка. Поэтому на практике часто прибегают к следующему приему грубой оценки погрешностей формул численного интегрирования, предложенному Рунге. Остаточный член каждой из формул численного интегрирования может быть записан в виде

$$R = h^k M, \quad (3.22)$$

где  $h$  – длина отрезка интегрирования или какой-то его доли,  $k$  фиксированное число и  $M$  произведение постоянной на производную подынтегральной функции порядка  $k-1$  в какой-то точке промежутка интегрирования. Если  $J$  точное значение интеграла, а  $I$  приближенное его значение, то

$$J = I + h^k M. \quad (3.23)$$

Вычислим тот же самый интеграл, по той же формуле численного интегрирования, но взяв вместо  $h$  величину  $\frac{h}{2}$ . При этом, чтобы получить значение интеграла по всему отрезку, придется применять формулу численного интегрирования дважды. Обозначим сумму полученных результатов через  $I_1$ . Тогда

$$J = I_1 + \left(\frac{h}{2}\right)^k M_1 + \left(\frac{h}{2}\right)^k M_2. \quad (3.24)$$

Последние два члена правой части дают погрешности при каждом интегрировании. Будем предполагать, что производная, входящая в  $M$  меняется не сильно на рассматриваемом промежутке. Тогда мы можем приближенно считать

$$J \approx I_1 + 2\left(\frac{h}{2}\right)^k M. \quad (3.25)$$

Исключая из (3.23) и (3.255) точное значение интеграла  $J$  найдем:

$$R = h^k M = \frac{I_1 - I}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}}.$$

Такой процесс часто употребляют для отыскания погрешностей формул не только при численном интегрировании.

Разработано очень много различных графических способов вычисления интегралов. Нужно сказать, что все они очень грубы и требуют сравнительно большой работы. Поэтому их можно рекомендовать лишь в исключительных случаях, когда интегрирование должно быть произведено в процессе других графических работ. Для приближенного интегрирования можно использовать специальные приборы: планиметры и интеграфы. На рисунках 3.1 и 3.2 приведен общий вид этих приборов. Приемы работы на этих приборах достаточно хорошо описаны в прилагаемых к ним инструкциях.

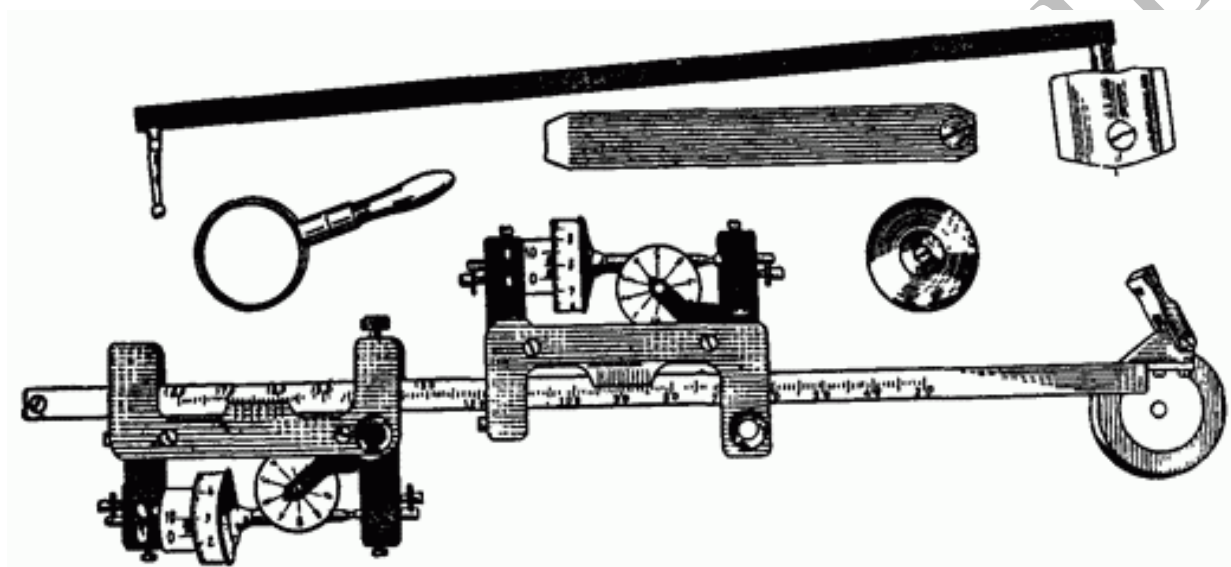


Рисунок 3.1 – Планиметр

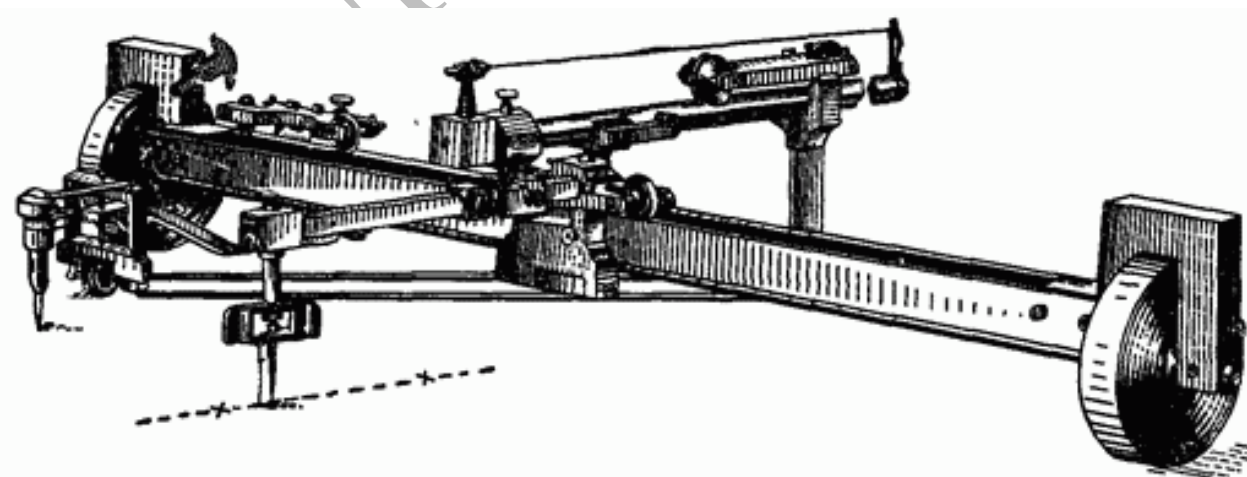


Рисунок 3.2 – Интеграф Коради

**Лекция 16. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (НАСТ) (3ч. – 2ч. УСР+1ч. ЛР)**

1. Постановка задачи. Теоремы существования и единственности, о свойствах узлов квадратурных формул НАСТ.

2. Частные случаи квадратурных формул НАСТ. Квадратурные формулы с заранее предписанными узлами и равными коэффициентами.

3. Квадратурная формула Гаусса. Коэффициенты формул Гаусса. Остаточный член формулы Гаусса.

Материал для изучения находится в файле «УСР по ЧМ ПМ.pdf».

## **Лекция 17. Формулы численного интегрирования Чебышева (2ч. УСР)**

1. Постановка задачи.
2. Алгоритм построения формул Чебышева. Абсциссы формул Чебышева. Пример.
3. Остаточный член формул Чебышева.

Материал для изучения находится в файле «УСР по ЧМ ПМ.pdf».

ВМИП Лекции по ЧМ ПМ

## Лекция 18. Методы уточнения результатов численного интегрирования (3ч. – 2ч. ЛК+1ч. ЛР)

1. Метод Рунге-Кутты.
2. Правило Рунге.
3. Формула Эйлера.
4. Метод Ромберга.

**Формула Эйлера.** Формула, которую мы рассмотрим, имеет самые разнообразные применения: численное интегрирование, суммирование рядов, разложение функции в ряд и т.д. Её часто называют формулой Эйлера-Маклорена, хотя впервые она была получена Эйлером. Формула Эйлера не связана непосредственно с теорией интерполирования, поэтому требует некоторых сведений о многочленах и числах Бернулли.

В тех случаях, когда известно разложение погрешности квадратурной формулы в степенной ряд по  $h$ , приближенное значение интеграла можно уточнить, проводя точное или приближенное вычисление коэффициентов ряда.

Рассмотрим функцию  $\varphi(t, x) = \frac{xe^{tx}}{e^x - 1}$ . Она может быть разложена в ряд по возрастающим степеням  $x$ , равномерно сходящийся при  $|x| \leq \alpha < 2\pi$ , т.к. ближайшей к началу координат особой точкой этой функции является  $x = 2\pi i$ .

Запишем ряд в виде

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n,$$

где коэффициенты  $B_n(t)$  ряда называются **многочленами Бернулли**.

При  $t=0$  получим

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

где  $B_n = B_n(0)$ ,  $B_0 = 1$ . Числа  $B_n$  называются **числами Бернулли**. Значения чисел Бернулли можно получить, используя рекуррентную формулу для многочленов Бернулли:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{B_{n-1}(t)}{1!(n-1)!} + \frac{B_{n-2}(t)}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{B_0(t)}{n!}. \quad (3.39)$$

При  $n=1$  в (3.39)  $\Rightarrow B_0(t)=1$ . Полагая  $n=2, 3, \dots$  будем последовательно получать все  $B_n(t)$ , причем все  $B_n(t)$  будут многочленами.

Пусть  $f(x)$  — достаточно гладкая (достаточное число раз дифференцируемая функция) на отрезке  $[a, b]$  функция. Тогда можно показать, что имеет место формула:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(a+h)] - \frac{B_2 h^2}{2!}[f'(a+h) - f'(a)] - \\ - \frac{B_4 h^4}{4!}[f^{(3)}(a+h) - f^{(3)}(a)] - \dots - \frac{B_{2r} h^{2r}}{(2r)!}[f^{(2r-1)}(a+h) - \\ - f^{(2r-1)}(a)] + R_{2r},$$

где  $R_{2r}$  – остаточный член формулы.

Если применить последнюю формулу к отрезкам  $[a, a+h]$ ,  $[a+h, a+2h], \dots, [a+(n-1)h, a+nh]$  и сложить полученные выражения, то и получим **формулу Эйлера**

$$\int_a^{a+nh} f(x)dx = h[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2}f(b)] - \\ - \frac{B_2 h^2}{2!}[f'(b) - f'(a)] - \frac{B_4 h^4}{4!}[f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)] - \frac{B_6 h^6}{6!}[f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] - \\ - \dots - \frac{B_{2r} h^{2r}}{(2r)!}[f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a)] + R_{2r}, \quad (3.40)$$

$$\text{где } R_{2r} = -nh^{2r+3} \frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!} f^{(2r+2)}(\xi).$$

Формула Эйлера (3.40) позволяет уточнить значение интеграла, вычисленного по формуле трапеций, путем вычисления производных от подынтегральной функции на концах отрезка.

Для удобства пользования формулой Эйлера, приведем значения чисел Бернулли и выражения многочленов Бернулли для некоторых значений  $n$

$$B_0(x) = 1; \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}; \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}; \quad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x; \\ B_4 = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}; \quad B_5 = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x; \\ B_6 = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}; \quad B_7 = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x; \\ B_8 = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30}. \\ B_0 = 1; \quad B_1 = -\frac{1}{2}; \quad B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_4 = -\frac{1}{30}; \quad B_6 = \frac{1}{42}; \quad B_8 = -\frac{1}{30}; \\ B_{10} = \frac{5}{66}; \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}; \quad B_{14} = \frac{7}{6}; \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}. \quad (3.41)$$

Различные примеры использования формулы Эйлера можно найти, например, [8] И.С. Березин, Н.П. Жидков Методы вычислений, Т.1, С. 291–297.

**Экстраполяция по Ричардсону.** Рассмотрим способ уточнения интегралов, основанный на приближенном вычислении коэффициентов в разложении погрешности квадратурного правила.

Пусть погрешность имеет вид  $R(f) = Mh^m$ , где  $M$  – некоторая постоянная, подлежащая определению,  $h$  – шаг интерполирования,  $m$  – показатель точности квадратурного правила,  $m > 0$ . Пусть интеграл вычислен для значений  $n_1$  и  $n_2$ , где  $n_2 > n_1$  и  $h_1 = \frac{b-a}{n_1}$ ,  $h_2 = \frac{b-a}{n_2}$ . Согласно предположению о структуре погрешности имеем:

$$\begin{cases} R_{n_1}[f] = I - I_{n_1} = Mh_1^m, \\ R_{n_2}[f] = I - I_{n_2} = Mh_2^m, \end{cases}$$

где  $I$  – точное значение интеграла.

Отсюда следует

$$I_{n_2} - I_{n_1} = M(b-a)^m \frac{n_2^m - n_1^m}{n_1^m n_2^m}.$$

Тогда для постоянной  $M$  получим выражение

$$M = (I_{n_2} - I_{n_1}) \frac{n_1^m n_2^m}{(b-a)^m (n_2^m - n_1^m)},$$

и, следовательно, для погрешности  $R(f)$  получим приближенную формулу

$$R(f) = (I_{n_2} - I_{n_1}) \frac{n_1^m n_2^m}{(b-a)^m (n_2^m - n_1^m)} h^m.$$

Если  $h_2 = \frac{b-a}{n_2}$ , выражение для погрешности примет вид

$$R(f) = \frac{I_{n_2} - I_{n_1}}{n_2^m - n_1^m} n_1^m.$$

Тогда в качестве уточненного значения интеграла можно взять выражение

$$I_{n_2, n_1} = I_{n_2} + \frac{n_1^m}{n_2^m - n_1^m} (I_{n_2} - I_{n_1}). \quad (3.42)$$

Указанный способ уточнения интегралов называется **экстраполяцией по Ричардсону**. На практике в качестве  $n_2$  удобно брать значение  $n_2 = 2n_1$ . В этом случае формула (3.42) принимает вид

$$I_{n_2, n_1} = I_{n_2} + \frac{n_1^m}{n_1^m (2^m - 1)} (I_{n_2} - I_{n_1}) = I_{2n_1} + \frac{1}{2^m - 1} (I_{2n_1} - I_{n_1}). \quad (3.43)$$

Формула трапеций получается при  $m = 2$ .

**Формула Ромберга.** Последовательное применение формулы Ромберга позволяет существенно уточнить значение интеграла. Пусть известно, что для погрешности квадратурного правила справедливо разложение:

$$I_h = I + a_1 h^{\alpha_1} + a_2 h^{\alpha_2} + \dots + a_m h^{\alpha_m} + o(h^{\alpha_{m+1}}), \quad (3.44)$$

где  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$ . Будем считать, что приближенные значения интеграла  $I$  вычислены для последовательности шагов  $h_0, h_1, \dots, h_m$ , где  $h_k = qh_{k-1} = q^k h_0 \Rightarrow q = \frac{h_k}{h_{k-1}}$ . Обозначим  $I^{(0)} = I$ ,  $I_{h_k}^{(1)} = I_{h_k}$



$$I_{h_k} = I + a_1 h_k^{\alpha_1} + a_2 h_k^{\alpha_2} + \dots + a_m h_k^{\alpha_m} + o(h_k^{\alpha_{m+1}}). \quad (3.45)$$

Рассмотрим представление (3.44) для двух соседних значений  $I_{h_{k-1}}^{(1)}$  и  $I_{h_k}^{(1)}$

$$I_{h_{k-1}}^{(1)} = I + a_1 h_{k-1}^{\alpha_1} + a_2 h_{k-1}^{\alpha_2} + \dots + a_m h_{k-1}^{\alpha_m} + o(h_{k-1}^{\alpha_{m+1}}),$$

$$I_{h_k}^{(1)} = I + a_1 h_k^{\alpha_1} + a_2 h_k^{\alpha_2} + \dots + a_m h_k^{\alpha_m} + o(h_k^{\alpha_{m+1}}).$$

Исключая  $a_1$ , имеем  $I_{h_k}^{(1)} - q^{\alpha_1} I_{h_{k-1}}^{(1)} = I(1 - q^{\alpha_1}) + o(h_{k-1}^{\alpha_2})$ . Следовательно, в качестве уточненного значения можно взять

$$I_{h_{k-1}}^{(2)} = I_{h_{k-1}}^{(1)} + \frac{1}{1 - q^{\alpha_1}} (I_{h_k}^{(1)} - I_{h_{k-1}}^{(1)}). \quad (3.46)$$

Описанный процесс можно продолжить, вычисляя  $I_{h_k}^{(j)}$  по формулам

$$I_{h_{k-1}}^{(j+1)} = I_{h_{k-1}}^{(j)} + \frac{1}{1 - q^{\alpha_j}} (I_{h_k}^{(j)} - I_{h_{k-1}}^{(j)}), \quad (3.47)$$

где  $j = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, m - j + 1}$ , а  $I_{h_k}^{(1)} = I_{h_k}$ ,  $k = \overline{0, m}$ . Заметим, что значения  $I_{h_k}^{(j)}$  совпадают с точным значением  $I$  с погрешностью  $o(h_k^{\alpha_j})$ .

Применительно к квадратурному правилу трапеций описанный метод уточнения интегралов называется **методом Ромберга**. Постоянные разложения  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  для квадратурного правила трапеций определяются формулой Эйлера (3.40).

## **Лекция 19. Вычисление несобственных интегралов (2ч. УСР)**

1. Постановка задачи. Методы выделения особенностей.
2. Мультипликативный способ.
3. Аддитивный способ.
4. Функции с несколькими особенностями.

Материал для изучения находится в файле «УСР по ЧМ ПМ.pdf».

ВМИП Лекции по ЧМ ПМ

## Лекция 20. Приближенное вычисление кратных интегралов (3ч. – 2ч. ЛК+1ч. ЛР)

1. Понятие о кубатурных формулах.
2. Метод повторного применения квадратурных формул.
3. Метод замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом.
4. Кубатурная формула трапеций на прямоугольной сетке. Кубатурная формула средних на прямоугольной сетке. Кубатурная формула Симпсона. Практическое применение.

Кубатурные формулы предназначены для вычисления двойных интегралов. Пусть необходимо вычислить двойной интеграл по области  $D$  с гладкой границей  $J = \iint_D f(x, y) dx dy$ . Такие интегралы не всегда могут быть вычислены с помощью элементарных функций. Существующие приближенные методы вычисления – кубатурные формулы, основанные на том, что область  $D$  покрывается сеткой, в узлах сетки вычисляются значения функции  $f(x_i, y_j)$  ( $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ ) и производится их суммирование по определенным правилам. При этом возникают следующие трудности: 1) выбор сетки; 2) аппроксимация границы области, если область не прямоугольная; 3) оценка точности вычислений.

**Метод повторного применения квадратурных формул.** Пусть необходимо приближенно вычислить кратный интеграл

$$I = \iiint_G \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_G f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n ,$$

где  $G$  – область  $n$ -мерного пространства.

Рассмотрим несколько способов построения формул численного интегрирования вида

$$\int_G f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sum_{i=1}^N c_i(p_i) + R(f) . \quad (3.53)$$

Формулы (3.53) называются **кубатурными формулами**, а точки  $p_i \in G$  называются **узлами кубатурной формулы**,  $c_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) – коэффициенты кубатурной формулы,  $R(f)$  – остаточный член.

Для простоты изложения допустим, что область  $G$  – прямоугольник  $G = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  и нужно вычислить интеграл

$$J = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy .$$

Представим этот интеграл в виде  $I = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b F(x) dx,$

где  $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ . Для вычисления  $J = \int_a^b F(x) dx$  воспользуемся квадратурной формулой Симпсона

$$J = \int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[ F(a) + 4F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(b) \right] + R_1(F(x)), \quad (3.54)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(F(x)) &= -\frac{(b-a)^5}{16 \cdot 180} F^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{16 \cdot 180} \int_c^d \frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial x^4} dy = \\ &= -\frac{(b-a)^5 (d-c)}{16 \cdot 180} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta)}{\partial x^4}, \quad (a < \xi < b, \quad c < \eta < d). \end{aligned}$$

В свою очередь  $F(x)$  можно представить в виде

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy = \frac{d-c}{6} \left[ f(x, c) + 4f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) + f(x, d) \right] + R_y(f(x, y)),$$

где  $R_y(f(x, y)) = -\frac{(d-c)^5}{16 \cdot 180} \frac{\partial^4 f(x, \xi)}{\partial y^4}$ .

Подставляя выражение для  $F(x)$  в (3.54), получим

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \frac{(b-a)(d-c)}{36} \left[ f(a, c) + 4f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f(a, d) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + \right. \\ &\quad \left. + 16f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + f(b, c) + 4f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f(b, d) \right] - \\ &\quad - \frac{(b-a)(d-c)}{2^5 \cdot 90} \cdot \left[ (b-a)^4 \frac{\partial^4 f(\xi, \eta)}{\partial x^4} + (d-c)^4 \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial y^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(b-a)^4 (d-c)^4}{2^5 \cdot 90} \frac{\partial^8 f(\xi_2, \eta_2)}{\partial x^4 \partial y^4} \right], \quad (a < \xi_i < b, \quad c < \eta_i < d). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Формула (3.55) называется **кубатурной формулой Симпсона**. Эта формула содержит значения функции  $f(x, y)$  в 9 точках. Из вида остаточного члена следует, что она дает точное значение интеграла, если  $f(x, y)$  является произвольным многочленом степени не выше трех.

Таким способом можно получить и другие кубатурные формулы, если для вычисления интегралов  $\int_a^b F(x) dx$  и  $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  применить те или иные квадратурные формулы.

Аналогично можно вычислить и интеграл более высокой кратности, причем по разным переменным можно использовать различные квадратурные формулы.

**Метод замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом.** Другой путь получения кубатурных формул состоит в замене подынтегральной функции некоторым интерполяционным многочленом.

Заменим в интеграле  $J = \iint_G f(x, y) dx dy$  функцию  $f(x, y)$  интерполяционным многочленом вида

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) L_i(x, y),$$

где многочлены  $L_i(x, y)$  не зависят от  $f(x, y)$  функции и обладают свойством

$$L_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

После замены подынтегральной функции получим

$$\begin{aligned} J &= \iint_G f(x, y) dx dy = \iint_G L(x, y) dx dy + \iint_G R(f(x, y)) dx dy = \\ &= \sum_{i=1}^N c_i f(x_i, y_i) + \bar{R}(f(x, y)), \text{ где } c_i = \iint_G L_i(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Вычисление коэффициентов  $c_i$  для простых областей  $G$  не вызывает затруднений.

Если область  $G$  – прямоугольник, т.е.  $G = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ . Рассмотрим сетку узлов, образуемых в пересечении прямых  $x_i = a + ih, y_j = c + jl, h = \frac{b-a}{n}, l = \frac{d-c}{m} (i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m})$ .

Тогда имеет место следующая интерполяционная формула

$$f(x, y) = L(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) \frac{\omega_n(x) \omega_m(y)}{(x-x_i) \omega'_n(x_i) \omega'_m(y_j)} + R(x, y), \quad (3.56)$$

где  $\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n), \omega_m(y) = (y-y_0)(y-y_1) \dots (y-y_m)$ .

Проводя интегрирование по формуле прямоугольника, получим

$$\iint_{a,c}^{b,d} f(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} f(x_i, y_j) + R(f), \quad (3.57)$$

где

$$c_{ij} = \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i) \omega'_n(x_i)} dx \cdot \int_c^d \frac{\omega_m(y)}{(y-y_j) \omega'_m(y_j)} dy,$$

$$R(f) = \int_a^b \int_c^d R(x, y) dx dy.$$

В нашем случае

$$c_{ij} = (b-a)(d-c) B_i^n B_j^m,$$

где  $B_i^n, B_j^m$  – коэффициенты Ньютона-Котеса (3.8).

В интерполяционной формуле (3.56) узлы интерполирования можно брать и неравноотстоящие по  $x$  и  $y$ , но так, чтобы они были точками пересечения прямых  $x = x_i, y = y_j$ . Выбирая их разными способами, будем получать различные кубатурные формулы.

**Практическое применение.** На практике для вычисления кратных интегралов удобнее использовать формулы, дающие высокую точность при минимальном числе узлов (так как такие формулы требуют меньшего объема вычислительной работы), например, **формулы Гаусса**.

Возьмем в качестве  $x_0, x_1$  и  $y_0, y_1$  в области  $G$  четыре узла квадратурной формулы Гаусса с двумя ординатами соответственно на отрезках  $[a, b]$  и  $[c, d]$ , т.е.

$$x_0 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, x_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, y_0 = \frac{c+d}{2} - \frac{d-c}{2\sqrt{3}}, y_1 = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2\sqrt{3}}. \quad (3.58)$$

Тогда интегрированием (3.56) при  $n = m = 1$  и  $x_0, x_1, y_0, y_1$  вида (3.58) получим кубатурную формулу

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \frac{(b-a)(d-c)}{4} [f(x_0, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_1, y_0) + f(x_1, y_1)] + R(f). \quad (3.59)$$

Погрешность этой формулы определится соотношением

$$R(f(x, y)) = \frac{(b-a)(d-c)}{24^3 \cdot 5} \left[ (b-a)^4 \frac{\partial^4 f(\xi, \eta)}{\partial x^4} + (d-c)^4 \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial y^4} - \frac{(b-a)^4 (d-c)^4}{24^3 \cdot 5} \frac{\partial^8 f(\xi_2, \eta_2)}{\partial x^4 \partial y^4} \right], ((\xi_i, \eta_i) \in G). \quad (3.60)$$

Таким образом, остаток кубатурной формулы Гаусса, построенной по четырем точкам, может оказаться меньше остатка кубатурной формулы Симпсона, построенной для девяти точек.

**Пример 3.7.** Вычислить приближенно двойной интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{y^2}{1+y^2} dx dy.$$

1. Использовать кубатурную формулу Симпсона с шагом  $h_x = h_y = \frac{b-a}{2}$ .

**Решение**

Кубатурная формула Симпсона для  $n = 2$  имеет вид (3.55)

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \frac{(b-a)(d-c)}{36} [f(a, c) + f(b, c) + 4[f(a, \frac{c+d}{2}) + f(\frac{a+b}{2}, c) + f(\frac{a+b}{2}, d) + f(b, \frac{c+d}{2})] + 16f(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}) + f(a, d) + f(b, d)] - R_2(f).$$

Найдем  $h_x = h_y = \frac{1-0}{2} = 0.5$ .

Найдем значения функции  $f(x, y) = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{y^2}{1+y^2}$  в точках, необходимых для построения последней формулы

		$c$		$d$	
		$f$	<b>0</b>	<b>0.5</b>	<b>1</b>
$a$	<b>0</b>	0	0	0	0
	<b>0.5</b>	0	0.04	0.1	
$b$	<b>1</b>	0	0.1	0.25	

Итак,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{y^2}{1+y^2} dx dy = \frac{1}{36} (4 \cdot (0,1 + 0,1) + 16 \cdot 0,04 + 0,25) =$$

$$= \frac{1}{36} (0,8 + 0,64 + 0,25) = \frac{1,69}{36} = 0,0469.$$

**2. Использовать кубатурную формулу Гаусса для  $n = 2$ .**

**Решение**

Кубатурная формула Гаусса для  $n = 2$  имеет вид (3.59) с узлами (3.58).

Вычислим узлы сетки (3.58)

$$x_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.5 - 0.2887 \approx 0.2113;$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.5 + 0.2887 \approx 0.7887;$$

$$y_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.2113;$$

$$y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.7887.$$

Найдем значения функции  $f(x, y) = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{y^2}{1+y^2}$  в узлах, необходимых для построения последней формулы (3.59)

		$x_0$	$x_1$
$f$		<b>0.2113</b>	<b>0.7887</b>
$y_0$	<b>0.2113</b>	0.00174	0.0164
$y_1$	<b>0.7887</b>	0.0164	0.1471

Таким образом,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{y^2}{1+y^2} dx dy = \frac{1}{4} (0.00174 + 2 \cdot 0.0164 + 0.1471) = \frac{0.1816}{4} = 0.04539.$$

## **Лекция 21. Вероятностный метод вычисления интегралов (2ч. УСР)**

1. Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло.
2. Графическая реализация метода Монте-Карло вычисления однократного интеграла.
3. Повышение точности метода Монте-Карло.
4. Погрешность метода Монте-Карло.

Материал для изучения находится в файле «УСР по ЧМ ПМ.pdf».



## Лекция 22. Сходимость квадратурных процессов (2ч. ЛК)

1. Теорема о сходимости интерполяционного многочлена.
2. Замечания о применимости теоремы.
3. Сходимость интерполяционных квадратур.

Формулы численного интегрирования, которые мы рассматривали, имели следующий вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n).$$

Мы получали их путем замены подынтегрального выражения интерполяционным многочленом Лагранжа. Мыслимы и другие способы замены. В связи с этим рассмотрим следующий вопрос. Функционалу

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

ставится в соответствие последовательность функционалов

$$L_n(f) = \sum_{i=1}^n c_i^{(n)} f(x_i^{(n)}), \quad (2)$$

где  $c_i^{(n)}$  выбираются из некоторой бесконечной треугольной матрицы:

$$\left. \begin{array}{l} c_1^{(1)}, \\ c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \\ c_1^{(3)}, c_2^{(3)}, c_3^{(3)}, \\ \dots \end{array} \right\} \quad (3)$$

а  $x_i^{(n)}$  — из другой заданной бесконечной треугольной матрицы:

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(1)}, \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \\ \dots \end{array} \right\} \quad (4)$$

Предполагается, что все  $x_i^{(n)}$  принадлежат отрезку  $[a, b]$ . При каких условиях, наложенных на  $c_i^{(n)}$  и  $x_i^{(n)}$ , для любой непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f(x)$  будет иметь место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = \int_a^b f(x) dx? \quad (5)$$

Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой:

**Теорема.** Для того чтобы  $L_n(f) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$  при  $n \rightarrow \infty$  для любой непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы это имело место для любого многочлена и чтобы  $\sum_{k=1}^n |c_k^{(n)}| < M$  для любого  $n$ .

Докажем сначала достаточность этих условий. При этом мы будем ссылаться на следующую теорему Вейерштрасса:

Для всякой непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f(x)$  и для всякого  $\varepsilon > 0$  можно найти такой многочлен  $P(x)$ , что  $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$  при любом  $x \in [a, b]$ .

Доказательство этой теоремы мы приведем в следующей главе. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - L_n(f) &= \int_a^b [f(x) - P(x)] dx + \\ &+ \left[ \int_a^b P(x) dx - L_n(P) \right] = L_n(f - P) \end{aligned} \quad (6)$$

В силу теоремы Вейерштрасса можно найти такой многочлен  $P(x)$ , что

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{при } x \in [a, b]. \quad (7)$$

Пусть  $P(x)$  в предыдущем равенстве и будет таким многочленом. Тогда абсолютная величина первого члена правой части не может превышать  $\varepsilon(b-a)$ . В силу первого условия доказываемой теоремы второе слагаемое в (6) при достаточно большом  $n$  может быть сделано меньше  $\varepsilon$  по абсолютной величине. Далее,

$$L_n[f - P] = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} [f(x_k^{(n)}) - P(x_k^{(n)})]. \quad (8)$$

Таким образом,

$$|L_n[f - P]| \leq \sum_{k=1}^n |c_k^{(n)}| |f(x_k^{(n)}) - P(x_k^{(n)})| \leq \varepsilon M. \quad (9)$$

Отсюда получаем:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - L_n(f) \right| \leq \varepsilon(b-a+1+M), \quad (10)$$

т. е. левая часть может быть сделана сколь угодно малой, что и доказывает достаточность условий.

Необходимость первого условия очевидна, так как многочлены являются непрерывными функциями. Поэтому нужно доказать только необходимость второго условия. Доказательство будем вести от противного. Пусть  $\sum_{k=1}^n |c_k^{(n)}|$  не ограничены. Для каждого  $n$  построим функцию  $\varphi_n(x)$ , обладающую следующими свойствами:

1.  $\varphi_n(x_k^{(n)})$  равно  $+1$ , если  $c_k^{(n)} > 0$  и равно  $-1$ , если  $c_k^{(n)} < 0$ ;
2.  $\varphi_n(x)$  — непрерывная функция;
3.  $|\varphi_n(x)| \leq 1$ .

Очевидно,

$$L_n(\varphi_n) = \sum_{k=1}^n |c_k^{(n)}|. \quad (11)$$

Обозначим для сокращения записей последнее выражение через  $M_n$ .

Возьмем некоторую из построенных нами функций  $\varphi_{n_1}(x)$ . Для нее должно иметь место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varphi_{n_1}) = \int_a^b \varphi_{n_1}(x) dx. \quad (12)$$

Но  $|\varphi_{n_1}(x)| \leq 1$ . Следовательно,

$$\left| \int_a^b \varphi_{n_1}(x) dx \right| \leq b - a \quad (13)$$

и найдется такое  $N_1$ , что при  $n > N_1$  будет

$$|L_n(\varphi_{n_1})| < e(b - a) \quad (14)$$

(здесь  $e$  — основание натуральных логарифмов). Далее, найдется такое  $n_2 \geq N_1$ , что  $M_{n_2} > 2 \cdot 2!$ . Рассмотрим функцию

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}. \quad (15)$$

Она непрерывна. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n \left[ \frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!} \right] = \int_a^b \left[ \frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!} \right] dx.$$

Но

$$\left| \int_a^b \left[ \frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!} \right] dx \right| \leq \left( \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \right) (b - a) < (e - 1)(b - a). \quad (16)$$

Поэтому найдется такое  $N_2$ , что при  $n > N_2$  будет

$$\left| L_n \left[ \frac{\varphi_{n_1}}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}}{2!} \right] \right| < e(b - a). \quad (17)$$

Найдем такое  $n_3 \geq N_2$ , что  $M_{n_3} > 3 \cdot 3!$ , и продолжим наше построение дальше.

Пусть мы уже нашли  $N_m$ . Тогда находим  $n_{m+1} > N_m$  такое, что  $M_{n_{m+1}} > (m+1)(m+1)!$ , и строим функцию

$$\psi_{m+1}(x) = \frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!} + \dots + \frac{\varphi_{n_{m+1}}(x)}{(m+1)!}. \quad (18)$$

Она непрерывна. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\psi_{m+1}) = \int_a^b \psi_{m+1}(x) dx. \quad (19)$$

Но

$$\left| \int_a^b \psi_{m+1}(x) dx \right| \leq \left( \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(m+1)!} \right) \times \\ \times (b-a) \leq (e-1)(b-a). \quad (20)$$

Находим  $N_{m+1}$  такое, что при  $n > N_{m+1}$

$$|L_n(\psi_{m+1})| < e(b-a), \quad (21)$$

и продолжим построение дальше.

Таким образом, мы получим ряд

$$\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!} + \dots + \frac{\varphi_{n_m}(x)}{m!} + \dots \quad (22)$$

Этот ряд будет равномерно сходиться, и следовательно, его сумма будет непрерывной функцией. Обозначим ее  $f(x)$ .

Возьмем любое натуральное число  $k$  и представим  $f(x)$  в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!} + \frac{\varphi_{n_k}(x)}{k!} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}. \quad (23)$$

При этом

$$L_{n_k}(f) = L_{n_k} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!} \right) + L_{n_k} \left( \frac{\varphi_{n_k}(x)}{k!} \right) + L_{n_k} \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!} \right). \quad (24)$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Так как  $n_k > N_{k-1}$ , то

$$\left| L_{n_k} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!} \right) \right| < e(b-a). \quad (25)$$

Далее,

$$\left| \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!} \right| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i!} = \frac{1}{(k+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{k+2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \dots \right] \leq \frac{1}{(k+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \dots \right] = \\ = \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{k+2}} = \frac{k+2}{(k+1)!(k+1)} < \frac{k+1}{(k+1)!k} = \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Таким образом,

$$\left| L_{n_k} \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!} \right) \right| < \frac{1}{k \cdot k!} M_{n_k}. \quad (26)$$

Функционал от среднего члена будет равен

$$L_{n_k} \left( \frac{\varphi_{n_k}(x)}{k!} \right) = \frac{M_{n_k}}{k!}. \quad (27)$$

Сопоставляя соотношения (24), (25), (26), (27), получим:

$$L_{n_k}(f) > \frac{M_{n_k}}{k!} - \frac{M_{n_k}}{k \cdot k!} - e(b-a).$$

Но  $M_{n_k} > k \cdot k!$  и, следовательно,

$$L_{n_k}(f) > k \cdot k! \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{k \cdot k!} \right) - e(b-a) = k - 1 - e(b-a), \quad (28)$$

а последнее выражение неограниченно возрастает с возрастанием  $k$ .

Поэтому  $L_{n_k}(f)$  не может стремиться к  $\int_a^b f(x) dx$ . Мы пришли к противоречию. Таким образом, необходимость условий доказана.

При доказательстве теоремы мы считали коэффициенты совершенно произвольными. В рассмотренных ранее случаях эти коэффициенты получались путем интегрирования интерполяционных многочленов. Такой процесс будем называть *интерполяционно-квадратурным*.

Для интерполяционно-квадратурных процессов сходимость наверняка имеет место для любого многочлена и первое условие теоремы можно опустить. Далее, беря  $f(x) = 1$ , получим:

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(n)} = \int_a^b dx = b - a.$$

Поэтому, если все  $c_k^{(n)}$  положительны, то и второе условие теоремы будет выполнено. Такой случай как раз имел место в формулах Гаусса. Поэтому *квадратурный процесс по формулам Гаусса всегда сходится*.

При изучении формул Ньютона—Котеса мы видели, что у них имеются отрицательные коэффициенты. Можно показать, что для формул Ньютона—Котеса условие  $\sum_{k=1}^n |c_k^{(n)}| < M$  не выполнено.

О сходимости формул Чебышева при  $p(x) \equiv 1$  вопрос ставить нельзя, так как при  $n \geq 10$  формул Чебышева не существует.



## Тема 4. Численное решение интегральных уравнений

### Лекция 23. Основные виды линейных интегральных уравнений (2ч. ЛК)

1. Постановка задачи, основные понятия и определения.
2. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра.
3. Теорема Фредгольма.

Под **интегральным уравнением** понимается уравнение, содержащее неизвестную функцию  $y(x)$  под знаком определенного интеграла. Интегральное уравнение будет **линейным**, если неизвестная функция входит в него лишь в первой степени.

Уравнение вида

$$\lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad (4.1)$$

называется **интегральным уравнением Фредгольма первого рода**.

Уравнение вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad (4.2)$$

называется **интегральным уравнением Фредгольма второго рода**.

В (4.1) и (4.2)  $K(x,s)$  – ядро и  $f(x)$  – известные функции, а  $\lambda$  – числовой параметр. Параметр  $\lambda$  вводится по следующим соображениям: при некотором данном значении  $\lambda$  интегральное уравнение (4.2) не всегда имеет решения. Варьируя параметр  $\lambda$  можно добиться того, чтобы решение уравнения (4.2) существовало. Параметр  $\lambda$  можно также ввести в левую часть уравнения Фредгольма первого рода (4.1).

Если в уравнении (4.2)  $f(x) \equiv 0$ , то получается *однородное* уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds, \quad (4.3)$$

допускающее нулевое (тривиальное) решение  $y \equiv 0$ . Значения параметра  $\lambda$ , при которых однородное интегральное уравнение (4.3) имеет ненулевые решения, называются **собственными значениями** (собственными числами) ядра  $K(x,s)$  или соответствующего уравнения (4.2), а отвечающие им ненулевые решения называются **собственными функциями**.

На вопрос о разрешимости интегральных уравнений дает следующая **теорема Фредгольма**:

1) если  $\lambda$  не является собственным значением ядра  $K(x,s)$ , то соответствующее неоднородное интегральное уравнение Фредгольма (4.2) с регулярным ядром  $K(x,s)$  и непрерывным свободным членом  $f(x)$  имеет единственное непрерывное решение  $y(x)$ ,  $x \in [a,b]$ ;

2) если  $\lambda$  же является собственным значением, то уравнение (4.2) или не имеет решений, или же имеет их бесконечное множество.

В приложениях важную роль играют уравнения Фредгольма второго рода с **симметрическим ядром**  $K(x, s)$ :  $K(x, s) = K(s, x)$ . Симметрические ядра обладают следующими **свойствами**:

1. Для всякого симметрического ядра существует, по меньшей мере, одно собственное значение.

2. Все собственные значения симметрического ядра действительны.

3. Собственные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  симметрического ядра, соответствующие различным собственным значениям  $\lambda$  и  $\mu$  ( $\lambda \neq \mu$ ), ортогональны между собой на  $[a, b]$

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

В приложениях встречаются также интегральные уравнения вида

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad (4.4)$$

и

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad (4.5)$$

которые называются **интегральными уравнениями Вольтерра** соответственно первого и второго рода. Если ввести функцию

$$K^*(x, s) = \begin{cases} K(x, s), & \text{при } a \leq s \leq x \\ 0, & \text{при } s > x \end{cases},$$

то уравнения Вольтерра (4.4) и (4.5) можно записать в виде соответствующих уравнений Фредгольма с ядром  $K^*(x, s)$ . Таким образом, теория уравнений Вольтерра сводится к теории уравнений Фредгольма, однако в некоторых случаях уравнения Вольтерра полезно изучать независимо.

В дальнейшем будем изучать интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода поэтому, для краткости, их будем именовать просто уравнениями Фредгольма и Вольтерра. Основными задачами будут

1. Нахождение приближенного или точного решения неоднородного интегрального уравнения при заданном значении параметра  $\lambda$ .

2. Нахождение собственных значений и соответствующих собственных функций однородного интегрального уравнения.

## Лекция 24. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода (4ч. – 2ч. ЛК+2ч. ЛР)

1. Метод квадратур решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Сходимость метода квадратур. Практический алгоритм численной реализации метода квадратур.
2. Метод последовательных приближений.
3. Метод вырожденных ядер. Приемы построения вырожденных ядер.
4. Метод коллокации. Метод наименьших квадратов. Метод простой итерации. Метод моментов.

**Метод последовательных приближений.** Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода (4.2)

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds, \quad (4.6)$$

где  $f(x)$  и  $K(x, s)$  непрерывны.

Будем искать решение в форме степенного ряда

$$y(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots = y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x). \quad (4.7)$$

Подставляя выражение (4.7) в интегральное уравнение (4.6) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\lambda$ , будем иметь следующие равенства

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_1(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi_0(s) ds, \\ \varphi_2(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi_1(s) ds, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_n(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases} \quad (4.8)$$

Пусть  $|K(x, s)| \leq M$  (ядро ограничено по модулю постоянной  $M$ ) и  $|f(x)| \leq N$  в области  $R \{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$ . Из формул (4.8) по индукции получаем

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x)| &\leq NM(b-a); \\ |\varphi_2(x)| &\leq NM^2(b-a)^2; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ |\varphi_n(x)| &\leq NM^n(b-a)^n; \end{aligned}$$

Поэтому сходимость ряда (4.7) будет обеспечена, если



$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Приняв

$$y(x) \approx Y_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \varphi_k(x),$$

получим приближенное решение интегрального уравнения (4.6) с погрешностью

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= |y(x) - Y_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda|^k |\varphi_k(x)| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} N[M(b-a)|\lambda|]^k = \frac{N[M(b-a)|\lambda|]^{n+1}}{1 - M(b-a)|\lambda|}. \end{aligned}$$

Формула (4.7) дает аналитическое относительно  $\lambda$  решение уравнения Фредгольма (4.6) в окрестности точки  $\lambda = 0$ . Из формул (4.8) следует, что решение (4.7) можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_a^b K_n(x, s) f(s) ds,$$

или

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds, \quad (4.9)$$

где

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s). \quad (4.10)$$

Коэффициенты  $K_n(x, s)$  называются **итерированными ядрами** и могут быть последовательно найдены по формулам

$$K_1(x, s) = K(x, s),$$

$$K_n(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt, \quad n = 2, 3, \dots$$

Функция  $R(x, s, \lambda)$  называется **резольвентой** уравнения (4.6) и при малых  $|\lambda|$  определяется степенным рядом (4.10). Пользуясь аналитическим продолжением резольвенту  $R(x, s, \lambda)$  можно продолжить на всю комплексную плоскость параметра  $\lambda$ , за исключением собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  (особые точки), которые являются **полюсами резольвенты**. Тогда формула (4.9) дает решение интегрального уравнения (4.6) при любом  $\lambda \neq \lambda_k$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ).

**Метод конечных сумм.** Метод основывается на приближенном вычислении определенного интеграла с помощью некоторой квадратурной формулы

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i) + R[F], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.11)$$

где  $x_i$  – абсциссы точек отрезка  $[a, b]$ ,  $A_i$  – числовые коэффициенты, не зависящие от выбора функции  $F(x)$ ,  $R[F]$  – остаточный член формулы (4.11) (ошибка). Обычно  $A_i \geq 0$  и известны, и  $\sum_{i=1}^n A_i = b - a$ .

Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (4.12)$$

Положим в интегральном уравнении (4.12)  $x = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда

$$y(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_i) + \lambda R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.13)$$

где  $R_i = R[K(x_i, s)y(s)]$  – соответствующие погрешности.

Отбрасывая в системе (4.13)  $\lambda R_i$ , получим для отыскания приближенных значений  $Y_i$  решения  $y(x)$  в узлах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейную систему алгебраических уравнений

$$Y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} Y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.14)$$

где введены обозначения  $f(x_i) = f_i$ ,  $K(x_i, x_j) = K_{ij}$ .

Решив эту систему, мы найдем значения  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , по которым процессом интерполяции можно получить приближенно решение интегрального уравнения (4.12) на всем отрезке  $[a, b]$ . За аналитическое выражение приближенного решения уравнения (4.12) можно принять функцию

$$Y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) Y_j, \quad (4.15)$$

принимаящую в узлах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  значения  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ .

Пусть узлы  $x_i$  – равноотстоящие точки:  $x_i = a + (i-1)h$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , шаг  $h = \frac{b-a}{n-1}$ , и в качестве квадратурной формулы берется

1. формула прямоугольников, то

$$A_i = h, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad A_n = 0.$$

2. обобщенная формула трапеций, то

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h.$$

3. обобщенная формула Симпсона при  $n = 2m + 1$ , ( $h = \frac{b-a}{2m}$ )

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}; \quad A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4h}{3}; \quad A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}.$$

Вернемся к интегральному уравнению (4.12). Если это уравнение однородно, то и система (4.14) будет однородной системой. Она будет иметь нетривиальное решение в том и только в том случае, когда определитель системы (4.14) равен нулю. Приравняв нулю этот определитель, получим алгебраическое уравнение степени  $n$  относительно  $\lambda$ . Решая это уравнение найдем  $n$  корней  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n$ , которые будут приближенными значениями первых  $n$  собственных значений ядра  $K(x, s)$ . Подставляя в однородную систему, соответствующую системе (4.14) одно из найденных значений  $\tilde{\lambda}_i$  и находя линейно независимые решения этой системы, получим приближения к линейно независимым собственным функциям ядра  $K(x, s)$ , соответствующим данному собственному значению.

Если  $\lambda$  не равно ни одному из этих корней, то однородная система имеет только тривиальное решение, а система (4.14) – единственное решение.

Этот метод дает хорошие результаты, если ядро  $K(x, s)$  и правая часть  $f(x)$  достаточно гладкие функции. В противном случае полезно предварительно преобразовать соответствующим образом интегральное уравнение.

При выборе квадратурной формулы в этом методе нужно иметь в виду, что чем более точную формулу мы применяем, тем большую гладкость ядра и решения, а следовательно, и  $f(x)$ , нужно требовать. Попытка применения более точных квадратурных формул для получения более точного приближения при несоблюдении этого условия может привести совсем к обратному результату.

В случае, если правая часть или ядро  $K(x, s)$  (или их производные) имеет особенности, целесообразно предварительно выполнить некоторые преобразования с тем, чтобы получить более хорошее интегральное уравнение, с помощью которого можно будет получить более точное приближенное решение исходного уравнения. Для этого могут быть полезны следующие приемы.

Если ядро гладкое, а правая часть  $f(x)$  имеет особенности, то можно вместо  $y(x)$  ввести новую неизвестную функцию:

$$z(x) = y(x) - f(x).$$

Подстановка ее в уравнение дает

$$z(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) z(s) ds = \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds,$$

т. е. мы получим уравнение в точности того же вида, но в котором правая часть будет уже более гладкой, а следовательно, и решение  $z(x)$  будет более гладким. Найдя  $z(x)$ , затем найдем и искомое решение  $y(x)$ .

Метод конечных сумм может быть применен также к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, вместо системы (4.14) будем иметь систему

$$\lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} Y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.16)$$

Особенно просто применение метода конечных сумм для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

которое можно рассматривать как уравнение Фредгольма второго рода. Здесь  $K_{ij} = 0$  при  $j > i$ , и, следовательно, соответствующая система (4.14) имеет вид

$$Y_i - \lambda \sum_{j=1}^i A_j K_{ij} Y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.17)$$

Получилась линейная система с треугольной матрицей. Если  $1 - \lambda A_i K_{ii} \neq 0$ , то из системы (4.17) последовательно находим

$$\begin{aligned} Y_1 &= f_1 (1 - \lambda A_1 K_{11})^{-1}, \\ Y_2 &= (f_2 + \lambda A_1 K_{21} Y_1) (1 - \lambda A_2 K_{22})^{-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ Y_n &= (f_n + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} A_j K_{nj} Y_j) (1 - \lambda A_n K_{nn})^{-1}. \end{aligned}$$

**Метод вырожденных ядер.** Ядро  $K(x, s)$  называется **вырожденным**, если оно может быть представлено в виде конечной суммы парных произведений

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad (4.18)$$

где функции  $\alpha_i(x)$  и  $\beta_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , являются линейно независимыми.

Подставим (4.18) в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds. \quad (4.19)$$

Для интегрального уравнения (4.19) с **вырожденным** ядром  $K(x, s)$  – будем иметь

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x), \quad (4.20)$$

где

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.21)$$

– некоторые постоянные коэффициенты. Подставим (4.20) в выражение (4.21). Теперь для определения коэффициентов  $c_i$  имеем алгебраическую систему линейных уравнений

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds + \lambda \int_a^b \beta_i(s) \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^n c_j \gamma_{ij} = f_i, \quad (4.22)$$

где

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds, \quad \gamma_{ij} = \int_a^b \alpha_i(s) \beta_j(s) ds. \quad (4.23)$$

Систему (4.22) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji}) c_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}$  — символ **Кронекера**. Обозначим через  $\Delta(\lambda)$  определитель последней системы

$$\Delta(\lambda) = \det(\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji}) \equiv \begin{vmatrix} 1 - \lambda \gamma_{11} & -\lambda \gamma_{21} & \dots & -\lambda \gamma_{n1} \\ -\lambda \gamma_{12} & 1 - \lambda \gamma_{22} & \dots & -\lambda \gamma_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda \gamma_{1n} & -\lambda \gamma_{2n} & \dots & 1 - \lambda \gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

и через  $\Delta_{ij}(\lambda)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  — алгебраические дополнения соответствующих элементов  $\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji}$  определителя  $\Delta(\lambda)$ .

Если  $\Delta(\lambda) \neq 0$ , то на основании правила Крамера, находим значения коэффициентов

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta_{ji}(\lambda) f_j}{\Delta(\lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, в силу (6.20) интегральное уравнение (6.19) имеет единственное решение

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} f_j \alpha_i(x). \quad (4.24)$$

Отсюда, подставляя вместо  $f_j$  соответствующее выражение из (4.23) и заменяя сумму интегралов интегралом суммы, получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\Delta(x, s, \lambda)}{\Delta(\lambda)} f(s) ds, \quad (4.25)$$

где

$$\Delta(x, s, \lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i(x) \beta_j(s) \Delta_{ji}(\lambda).$$

Из формулы (4.25) вытекает, что функция

$$R(x, s, \lambda) = \frac{\Delta(x, s, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i(x) \beta_j(s) \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad (4.26)$$

является **резольвентой** интегрального уравнения (4.19).

Собственные значения ядра  $K(x, s)$  определяются из уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (4.27)$$

Если  $\lambda_k, k=1, 2, \dots, m, m \leq n$  является корнем уравнения (4.27) ( $\lambda_k \neq 0$ ), то соответствующие собственные функции  $\varphi_k(x)$  ядра  $K(x, s)$ , то есть нетривиальные решения однородного уравнения, соответствующего (4.19), будут иметь вид

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \sum_{i=1}^n \bar{c}_i^{(k)} \alpha_i(x),$$

где  $\bar{c}_i^{(k)}$  – ненулевые решения линейной однородной системы

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda_k \gamma_{ji}) \bar{c}_j^{(k)} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Если  $\lambda = \lambda_k$  является собственным значением ядра  $K(x, s)$ , то неоднородное уравнение (7.19) или не имеет решений или имеет их бесконечно много.

Для приближенного решения **общего** интегрального уравнения

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds, \quad (4.28)$$

функции  $f(x)$  и  $K(x, s)$  будем считать непрерывными. Ядро  $K(x, s)$  заменим близким к нему вырожденным ядром

$$K^{(n)}(x, s) = \sum_{m=0}^n \alpha_m(x) \beta_m(s).$$

**Приемы построения вырожденных ядер.** Укажем несколько способов такой замены.

Если ядро  $K(x, s)$  аналитическое по  $x$  на отрезке  $[a, b]$ , то в качестве вырожденного ядра  $K^{(n)}(x, s)$  можно взять конечный отрезок ряда Тейлора

$$K^{(n)}(x, s) = \sum_{m=0}^n \frac{(x - x_0)^m}{m!} K_{x^m}^{(m)}(x_0, s),$$

где  $x_0$  – некоторая точка отрезка  $[a, b]$ .

Аналогичный прием можно применить также, если ядро  $K(x, s)$  является аналитической функцией по  $s$  на отрезке  $[a, b]$ .

Для построения вырожденного ядра можно также использовать конечный отрезок двойного ряда Тейлора

$$K^{(n)}(x, s) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n a_{pq} (x - x_0)^p (s - s_0)^q$$

где

$$a_{pq} = \frac{1}{p! q!} \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial s^q} K(x_0, s_0), \quad (x_0, y_0 \in [a, b]).$$

Пусть  $l = b - a$ . Непрерывное ядро  $K(x, s)$  допускает аппроксимацию тригонометрическим полиномом периода  $2l$ . Например, можно положить

$$K^{(n)}(x, s) = \frac{a_0(s)}{2} + \sum_{p=1}^n a_p(s) \cos \frac{p\pi x}{l}, \quad (4.29)$$

где  $a_p(s)$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ) – коэффициенты Фурье

$$a_p(s) = \frac{2}{l} \int_a^b K(x, s) \cos \frac{p\pi x}{l} dx. \quad (4.30)$$

Аналогичное разложение получается, если поменять местами переменные  $x$  и  $s$ . Можно также использовать конечный отрезок двойного ряда Фурье. Полагая, например,

$$a_p(s) \approx \frac{a_{p0}}{2} + \sum_{q=1}^n a_{pq} \cos \frac{q\pi s}{l}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, n,$$

из формул (4.29) и (4.30) имеем

$$K^{(n)}(x, s) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n a_{p0} \cos \frac{p\pi x}{l} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n a_{0q} \cos \frac{q\pi s}{l} + \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pq} \cos \frac{p\pi x}{l} \cos \frac{q\pi s}{l},$$

где

$$a_{pq} = \frac{4}{l^2} \int_a^b \int_a^b K(x, s) \cos \frac{p\pi x}{l} \cos \frac{q\pi s}{l} dx ds.$$

Наконец, полагая

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

можно воспользоваться первым интерполяционным полиномом Ньютона по переменной  $x$

$$K^{(n)}(x, s) = K(x_0, s) + \sum_{m=1}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-1})}{m! h^m} \Delta^m K(x_0, s).$$

Аналогично можно взять первый интерполяционный полином Ньютона по переменной  $s$ .

Иногда целесообразно использовать интерполяционный полином Ньютона для функций двух переменных

$$K^{(n)}(x, s) = K^{(n)}(x_0, x_0) + \sum_{p+q=1}^{p+q=n} \frac{\Delta_{x^p s^q}^{p+q} K(x_0, x_0)}{p! q! h^{p+q}} (x-x_0) \cdot \\ \cdot (x-x_1) \dots (x-x_{p-1}) (s-s_0) \dots (s-s_{q-1}),$$

где  $x_0 \in [a, b]$ .

Если  $K^{(n)}(x, s)$  является приближенным вырожденным ядром для точного ядра  $K(x, s)$  и функция  $f_n(x)$  близка к функции  $f(x)$ , то решение  $z_n(x)$  интегрального уравнения

$$z_n(x) = f_n(x) + \lambda \int_a^b K^{(n)}(x, s) z_n(s) ds, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.31)$$

можно рассматривать как приближение решения  $y(x)$  уравнения (4.28).

О единственности решения и погрешности интегрального уравнения, как показали Л.В. Канторович и В.И. Крылов, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.1.** Пусть

$$\int_a^b |K(x,s) - K^{(n)}(x,s)| ds \leq \varepsilon, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \delta$$

и резольвента  $R_n(x,s,\lambda)$  для уравнения (4.31) такова, что

$$\int_a^b |R_n(x,s,\lambda)| ds \leq M_n(\lambda)$$

при  $x \in [a,b]$ , причем выполнено неравенство  $q = \lambda \varepsilon [1 + M_n(\lambda)] < 1$ , тогда уравнение (4.28) имеет единственное решение  $y(x)$  и имеет место оценка

$$|y(x) - z_n(x)| \leq \frac{Nq[1 + \lambda M_n(\lambda)]}{1 - q} + \delta, \quad (4.32)$$

где  $N \geq \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ .

Из оценки (4.32) вытекает, что если  $K^{(n)}(x,s) \rightarrow K(x,s)$  и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , причем  $M_n(\lambda) \leq M(\lambda) < \infty$ , то  $z_n(x) \rightarrow y(x)$  на отрезке  $[a,b]$ .

**Метод коллокации.** Рассмотрим интегральное уравнение (т.е. невязку)

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds - f(x) = 0. \quad (4.33)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде функции определенного вида

$$Y_n = \Phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (4.34)$$

со свободными параметрами (неопределенными коэффициентами)  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , которые подлежат определению. Подставляя выражение (4.34) в уравнение (4.33), получим невязку

$$R[Y_n] = Y_n(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)Y_n(s)ds - f(x). \quad (4.35)$$

Если  $y$  является точным решением, то невязка  $R[y] = 0$ . Поэтому необходимо подобрать параметры  $c_1, c_2, \dots, c_n$  так, чтобы невязка  $R[Y_n]$  была как можно меньшей величиной. Минимизировать невязку  $R[Y_n]$  можно различными способами.

Рассмотрим те методы минимизации невязки  $R[Y_n]$ , которые применяются на практике.

Сначала сделаем несколько замечаний. Если невязка  $R[Y_n]$  получилась малой, то она близка к невязке  $R[y] = 0$ , даваемой точным решением  $y$ . Но если два оператора  $R[Y_n]$  и  $R[y]$  имеют близкие значения, то отсюда не следует,



что функции  $Y_n$  и  $y$  близки между собой в обычном смысле (например, равномерного приближения). Поэтому возникает задача, в которой по известной невязке  $R[Y_n]$  требуется оценить погрешность  $|y - Y_n|$  приближенного решения  $Y_n$ . Другая задача, с которой обычно сталкиваются – это вопрос о сходимости  $Y_n$  к точному решению  $y$  при  $n \rightarrow \infty$ , то есть выяснение условий, при которых имеет место предельное равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y$ . Если это равенство справедливо, то данным методом решение  $y$  можно найти с любой степенью точности, взяв достаточно большое количество параметров  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Для построения приближенного решения  $Y_n$  обычно берут функцию, линейно зависящую от неизвестных  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Поэтому положим

$$Y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (4.36)$$

где  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  – известные функции, причем  $\varphi_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – линейно независимы и  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – неопределенные коэффициенты. Подставляя (4.36) в левую часть уравнения (4.33), получим невязку

$$R[Y_n] = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) [\varphi_0(s) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(s)] ds,$$

или

$$R[Y_n(x)] = \psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, \lambda), \quad (4.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(x, \lambda) &= \varphi_0(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_0(s) ds, \\ \psi_i(x, \lambda) &= \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Согласно методу **коллокации** требуется, чтобы невязка  $R[Y_n]$  обращалась в нуль в заданной системе точек  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  из отрезка  $[a, b]$  (точки коллокации), то есть, полагаем

$$R[Y_n(x_j)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b.$$

Отсюда на основании формулы (4.37) для определения коэффициентов  $c_1, c_2, \dots, c_n$  получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x_j, \lambda) = -\psi_0(x_j, \lambda), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.39)$$

Если определитель системы (4.39)  $D(\lambda) = \det[\psi_i(x_j, \lambda)] \neq 0$  отличен от нуля, то из (4.39) можно однозначно определить величины  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , и, следовательно, найти приближенное решение  $Y_n(x)$  по формуле (4.36).

Приравнявая нулю определитель  $D(\lambda)$ , получим уравнение  $D(\lambda) = 0$ , из которого можно найти приближенные значения  $\tilde{\lambda}_k, k = 1, 2, \dots, n$  первых собственных чисел ядра  $K(x, s)$ .

Если положить  $f(x) \equiv 0, \varphi_0(x) \equiv 0, \lambda = \tilde{\lambda}_k$ , то вместо системы (4.39) будем иметь однородную систему

$$\sum_{i=1}^n \tilde{c}_i^{(k)} \psi_i(x_j, \tilde{\lambda}_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Решая последнюю однородную систему, найдем ненулевые решения  $\tilde{c}_i^{(k)}$  этой системы. Тогда для ядра  $K(x, s)$  получим приближенные собственные функции

$$\tilde{Y}_n^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i^{(k)} \varphi_i(x),$$

отвечающие его собственному значению  $\lambda_k \approx \tilde{\lambda}_k$ .

**Метод наименьших квадратов.** Для уравнения

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds - f(x) = 0, \quad (4.40)$$

аналогично методу коллокации, полагаем

$$Y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (4.41)$$

где  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  – известные функции, причем  $\varphi_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – линейно независимы и  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – неопределенные коэффициенты. Подставляя (4.41) в левую часть уравнения (4.40), получим невязку

$$R[Y_n] = \psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, \lambda),$$

где  $\psi_0(x, \lambda)$  и  $\psi_i(x, \lambda)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) определяются формулами (4.38).

Согласно методу **наименьших квадратов** коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_n$  отыскиваются из условия минимума интеграла

$$I = \int_a^b \{R[Y_n]\}^2 dx = \int_a^b [\psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, \lambda)]^2 dx. \quad (4.42)$$

Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда, на основании (4.42), дифференцируя по параметрам  $c_1, c_2, \dots, c_n$  под знаком интеграла, будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_a^b \psi_j(x, \lambda) [\psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, \lambda)] dx = 0. \quad (4.43)$$

Обозначим

$$(\psi_i, \psi_j) = \int_a^b \psi_i(x, \lambda) \psi_j(x, \lambda) dx.$$

Тогда систему (4.43) можно записать в виде нормальной системы метода наименьших квадратов

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(\psi_1, \psi_1) + c_2(\psi_1, \psi_2) + \dots + c_n(\psi_1, \psi_n) = -(\psi_1, \psi_0) \\ c_2(\psi_2, \psi_1) + c_2(\psi_2, \psi_2) + \dots + c_n(\psi_2, \psi_n) = -(\psi_2, \psi_0) \\ ..... \\ c_n(\psi_n, \psi_1) + c_2(\psi_n, \psi_2) + \dots + c_n(\psi_n, \psi_n) = -(\psi_n, \psi_0). \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Заметим, что если  $\varphi_0(x) \equiv 0$ , то  $\psi_0(x) = -f(x)$  и, следовательно,  $-(\psi_i, \psi_0) = (\psi_i, f)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Так как  $(\psi_i, \psi_j) = (\psi_j, \psi_i)$ , то матрица системы (4.44) симметрическая.

Метод наименьших квадратов применяется также для приближенного нахождения собственных значений и собственных функций ядра  $K(x, s)$ , аналогично тому, как это делается в методе коллокации. А именно, полагая  $f(x) \equiv 0$  и  $\varphi_0(x) \equiv 0$ , откуда  $\psi_0(x) \equiv 0$ , находим приближенные значения собственных чисел из алгебраического уравнения  $\det[(\psi_i, \psi_j)] = 0$ . После этого приближенные собственные функции находятся из однородной системы (4.44), где вместо  $\lambda$  подставлено соответствующее приближенное значение.

### Метод моментов. Пусть

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds - f(x) = 0. \quad (4.45)$$

Аналогично предыдущим пунктам, приближенное решение этого уравнения будем искать в виде конечной суммы

$$Y_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (4.46)$$

где  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  – известные функции, причем  $\varphi_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – линейно независимы и  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – неопределенные коэффициенты. Подставляя (4.46) в левую часть уравнения (4.45), получим невязку

$$R[Y_n] = \sum_{j=1}^n c_j [\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_j(s) ds] - \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds. \quad (4.47)$$

Согласно методу **моментов** коэффициенты  $c_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) определяются из условия ортогональности невязки ко всем функциям  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ . Это дает систему уравнений

$$\int_a^b R[Y_n] \varphi_i(x) dx = 0. \quad (i = \overline{1, n})$$

Учитывая (4.47), получим

$$\sum_{j=1}^n c_j (\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij}) = \lambda \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.48)$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad \beta_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x) dx \int_a^b K(x, s) \varphi_j(s) ds, \\ \gamma_i = \int_a^b \varphi_i(x) dx \int_a^b K(x, s) f(s) ds.$$

Если определитель системы (4.48)  $D(\lambda) = \det(\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij})$  отличен от нуля, то из этой системы однозначно определяются коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Тогда формула (4.46) дает приближенное решение интегрального уравнения (4.45). Из уравнения  $D(\lambda) = 0$  приближенно находятся собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ядра  $K(x, s)$ . Найдя ненулевые решения однородной линейной системы

$$\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j (\alpha_{ij} - \lambda_k \beta_{ij}) = 0, \quad (i = \overline{1, n})$$

легко строятся (см. например, метод вырожденных ядер) приближенные собственные функции  $\tilde{y}^{(k)}(x)$ , отвечающие данному собственному значению  $\lambda_k$ .

Рассмотренные здесь методы минимизации невязки применимы также к решению нелинейных интегральных уравнений. Имеются также другие методы решения интегральных уравнений, например, метод Монте-Карло.

**Пример 4.1.** Решить уравнение

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( xs + \frac{(xs)^3}{3!} + \frac{(xs)^5}{5!} \right) y(s) ds = 1 - x^2 \quad (4.49)$$

методом последовательных приближений. Заменить решение отрезком ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^2 \lambda^k \varphi_k(x). \quad (4.50)$$

**Решение.**

Решение уравнения  $y(x)$  ищем в виде ряда по степеням  $\lambda$  (см. (4.50)):

$$y(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2 \quad (4.51)$$

Подставляя (4.51) в уравнение (4.50) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , получим

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_1(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi_0(s) ds, \\ \varphi_2(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi_1(s) ds, \end{cases}$$

Учитывая (4.50), получаем  $\varphi_0(x) = f(x) = 1 - x^2$ ,

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 \left( xs + \frac{(xs)^3}{3!} + \frac{(xs)^5}{5!} \right) (1 - s^2) ds = \frac{x}{4} + \frac{x^3}{72} - \frac{x^5}{2880} = 0.25x + 0.0139x^3 - 0.00035x^5.$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^1 \left( xs + \frac{(xs)^3}{3!} + \frac{(xs)^5}{5!} \right) \left( \frac{s}{4} + \frac{s^3}{72} - \frac{s^5}{2880} \right) ds = \frac{347x}{4032} + \frac{1885x^3}{217728} + \frac{74297x^5}{239500800} = 0.0861x + 0.00866x^3 + 0.00031x^5.$$

Учитывая (4.51) и что  $\lambda = \frac{1}{2}$ , приближенное решение (4.50) запишется в виде

$$y(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}(0.25x + 0.0139x^3 - 0.00035x^5) + \frac{1}{4}(0.0861x + 0.00866x^3 + 0.00031x^5) = \\ = 1 + 0.1465x - x^2 + 0.00912x^3 - 0.0000975x^5.$$

Если интегралы, входящие в  $\varphi_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) не вычисляются точно, то необходимо их вычислить с помощью квадратурных формул (например, трапеций, Симпсона).

## **Лекция 25. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода (2ч. УСР)**

1. Метод квадратур решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Сходимость метода квадратур.
2. Построение приближенного решения в виде непрерывной функции.
3. Способы построения квадратурных формул для решения уравнений Вольтерра второго рода.
4. Практический алгоритм построения приближенного решения с заданной точностью.

Материал для изучения находится в файле «УСР по ЧМ ПМ.pdf».



Воспользовавшись векторными обозначениями

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix},$$

Систему (5.4) запишем в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (5.5)$$

Под *решением системы* (5.5) понимается любая совокупность функций

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ , где  $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ , которая, будучи подставлена в систему

(5.5), обращает все уравнения этой системы в тождество. Так как система дифференциальных уравнений имеет бесконечное множество решений, то для выделения одного конкретного решения  $y = y(x)$ , кроме уравнения, нужны дополнительные условия. В простейшем случае задаются начальные условия

$$y(x_0) = y^{(0)}, \quad (5.6)$$

т.е. получаем *задачу Коши*: найти решение  $y = y(x)$  системы дифференциальных уравнений (5.4) или (5.5), удовлетворяющее заданным начальным условиям (5.6), где  $x_0$  – фиксированное значение независимой

переменной,  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ \dots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$  – данная система чисел. Геометрически это значит,

что требуется отыскать интегральную кривую  $L$ , проходящую через заданную точку  $M_0(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$  пространства  $R^{n+1} = \{x, y_1, \dots, y_n\}$ .

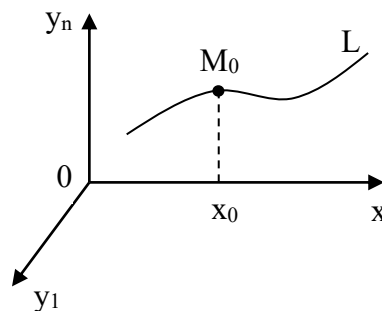


Рисунок 5.1 – Геометрическая интерпретация задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

**О методах решения дифференциальных уравнений.** В курсах по дифференциальным уравнениям изучаются методы, позволяющие выразить решение дифференциального уравнения через элементарные функции, либо



представить его при помощи квадратур от элементарных функций. Эти методы называют **точными**. Классы уравнений, для которых применимы точные методы, сравнительно узки и охватывают только малую часть возникающих на практике задач. Указанное обстоятельство привело к созданию большого числа методов приближенного решения дифференциальных уравнений. **Приближенные методы** в зависимости от формы, в которой они представляют решение, можно разделить на три группы:

- 1) **аналитические** методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения;
- 2) **графические** методы, дающие приближенное решение в виде графика;
- 3) **численные** методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

Численные методы не позволяют найти общее решение уравнения (5.1) или системы уравнений (5.5). С их помощью можно найти лишь решение начальных или краевых задач. Численные методы применимы к задачам, имеющим единственное решение (корректно поставленным задачам). В некоторых случаях условий корректности может оказаться недостаточно. Надо чтобы задача была хорошо обусловлена (устойчива), т.е. чтобы малые изменения в задании исходных данных приводили к достаточно малым изменениям искомого решения.

**Метод Эйлера.** Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b \quad (5.7)$$

$$y(a) = y_0. \quad (5.8)$$

На отрезке  $[a, b]$  выберем конечное множество точек  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), причем будем считать, что  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ . Искомую интегральную кривую  $y = y(x)$ , проходящую через точку  $M_0(x_0, y_0)$  приближенно заменим

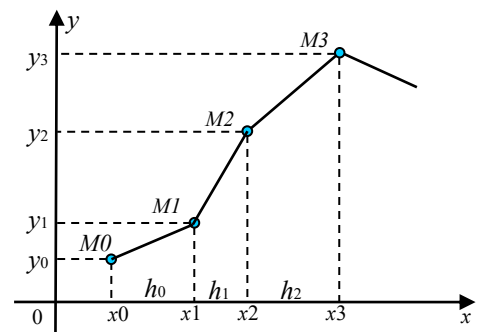
ломаной  $M_0M_1M_2\dots$  с вершинами  $M_i(x_i, y_i)$ , звенья которой  $M_iM_{i+1}$  прямолинейны между прямыми  $x = x_i$  и  $x = x_{i+1}$  и имеют подъем  $\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(x_i, y_i)$ . Таким образом, звенья  $M_iM_{i+1}$  ломаной Эйлера в каждой вершине  $M_i$  имеют направление  $y'_i = f(x_i, y_i)$ , совпадающее с направлением интегральной кривой уравнения (5.7), проходящей через точки  $M_i$ .

В методе Эйлера (метод ломаных) приближенное значение  $y_i = y(x_i)$  вычисляется по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.9)$$

где  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . Если  $x_i$  – равноотстоящие точки, то  $h_i = h$ .

Для оценки точности полученного приближенного значения на практике пользуются двойным пересчетом: расчет на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$



повторяют с шагом  $h_i/2$  и погрешность более точного решения  $y_i^*$  (при шаге  $h_i/2$ ) оценивают по формуле

$$|y_i^* - y(x_i)| \approx |y_i^* - y_i|.$$

Метод Эйлера легко распространяется и на системы дифференциальных уравнений. Приближенное решение задачи Коши для системы

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}, \quad \begin{matrix} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{matrix}, \quad a \leq x \leq b$$

Вычисляется последовательно по следующим формулам

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h_i f_1(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} &= z_i + h_i f_2(x_i, y_i, z_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциальных уравнений. К его недостаткам относится малая точность и систематическое накопление ошибок.

**Модификации метода Эйлера.** Рассмотрим дифференциальное уравнение (5.7) с начальным условием (5.8). На отрезке  $[a, b]$  зададим конечное множество точек

$$\{x_i\} (i = 0, 1, \dots, N), \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad h_i = x_{i+1} - x_i (i = 0, 1, \dots, N-1).$$

Согласно методу Эйлера, будем иметь

$$y_{i+1} = y_i + h_i f_i, \quad f_i = f(x_i, y_i) \quad (5.10)$$

Более точным, в отличие от метода Эйлера, является **усовершенствованный метод ломаных**, при котором сначала вычисляют промежуточные значения

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h_i}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h_i}{2} f_i.$$

и находят значение поля интегральных кривых в средней точке  $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ , то есть  $f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ , а затем полагают

$$y_{i+1} = y_i + h_i f_{i+\frac{1}{2}}. \quad (5.11)$$

Другой модификацией метода Эйлера является **усовершенствованный метод Эйлера-Коши**, при котором сначала определяется «грубое приближение» решения  $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h_i f_i$ , исходя из которого, находится направление поля интегральных кривых  $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$ . Затем приближенно полагают

$$y_{i+1} = y_i + h_i \frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2}. \quad (5.12)$$

Остаточные члены первого (5.11) и второго (5.12) улучшенных методов Эйлера на каждом шаге имеют порядок  $O(h^3)$ . Оценка погрешности в точке  $x_i$  может быть получена с помощью двойного пересчета: расчет повторяют с шагом  $h_i/2$  и погрешность более точного решения  $y_i^*$  (при шаге  $h_i/2$ ) оценивают приближенно по формуле

$$|y_i * -y(x_i)| \approx \frac{1}{3}|y_i * -y_i|,$$

где  $y(x)$  – точное решение дифференциального уравнения.

Усовершенствованный метод Эйлера-Коши можно еще более уточнить, применяя **итерационную обработку** каждого значения  $y_i$ . А именно, исходя из грубого приближения

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$$

строим итерационный процесс

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h_i}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i^{(k-1)})) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Итерации продолжают до тех пор, пока в пределах требуемой точности два последовательных приближения  $y_{i+1}^{(k-1)}$  и  $y_{i+1}^{(k)}$  не совпадут. После чего  $y_{i+1}^{(k)}$  принимают за приближенное значение  $y(x_{i+1})$ . Если же алгоритм уточнения после трех-четырех итераций не приводит к совпадению требуемого числа десятичных знаков, то следует уменьшить шаг вычислений  $h_i$ .

Метод Эйлера и его модификации являются простейшими представителями конечно-разностных методов (шаговых методов) и являются одношаговыми.

## Лекция 27. Методы Рунге-Кутты (3ч. – 2ч. ЛК+1ч. ЛР)

1. Идея построения методов Рунге-Кутты. Порядок точности методов.
2. Метод Рунге-Кутта 2-го порядка аппроксимации.
3. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка аппроксимации. Выбор шага расчета. Организация вычислений с автоматическим выбором шага.
4. Метод Рунге-Кутта для решения систем дифференциальных уравнений второго порядка.

**Метод Рунге-Кутта.** Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (5.7) с начальным условием (5.8). Выбирая шаг  $h = \frac{b-a}{N}$ , на отрезке  $[a, b]$  введем сетку  $x_i = x_0 + ih$ ,  $y_i = y(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Вычислим числа

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \quad K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}h}{2}\right), \\ K_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}h}{2}\right), \quad K_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}h). \end{aligned}$$

Согласно обычному методу Рунге-Кутта, последовательные приближенные значения  $y_i = y(x_i)$  искомой функции  $y$  определяются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (5.13)$$

где  $\Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)})$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

Шаг расчета можно менять при переходе от одной точки к другой. Для контроля правильности выбора шага  $h$  рекомендуется вычислять дробь

$$\theta = \frac{|K_2^{(i)} - K_3^{(i)}|}{|K_1^{(i)} - K_2^{(i)}|}.$$

Величина  $\theta$  не должна превышать нескольких сотых. В противном случае шаг  $h$  следует уменьшить.

Погрешность этого метода на каждом шаге есть величина порядка  $h^5$ , если  $f(x, y) \in C^{(5)}$ , а на всем отрезке  $[x_0, X]$  порядок точности равен  $h^4$ .

Оценка погрешности метода очень затруднительна. Грубую оценку можно получить с помощью двойного просчета по формуле:

$$|y_i^* - y(x_i)| \approx \frac{1}{15} |y_i^* - y_i|,$$

где  $y(x_i)$  – значение точного решения (5.7) в точке  $x_i$ , а  $y_i^*$  и  $y_i$  – приближенные значения, полученные с шагом  $\frac{h}{2}$  и  $h$ .

Метод Рунге-Кутта обладает значительной точностью и, несмотря на свою трудоемкость, широко используется при численном решении дифференциальных уравнений. Кроме того, важным преимуществом этого метода является возможность применения «переменного шага».

Заметим, что для начала вычислений по методу Рунге-Кутта не нужно строить начальный отрезок.

При вычислении приближенного решения задачи (5.7) – (5.8) по формуле (5.13) удобно пользоваться схемой, приведенной в следующей таблице:

$i$	$x$	$y$	$K = hf(x, y)$	$\Delta y$
0	$x_0$	$y_0$	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				$\frac{1}{6} \sum = \Delta y_0$
1	$x_1$	$y_1$	$\dots$	$\dots$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Метод Рунге-Кутты применим также для приближенного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае в приведенных выше формулах величины  $y, f, y_0, y_i, \Delta y_i, K_1^{(0)}, K_2^{(0)}, K_3^{(0)}, K_4^{(0)}, y_1$  являются векторами, а  $x, x_0, x_i, h$  – скалярными величинами.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений I порядка можно решать с помощью схемы Рунге-Кутты с четвертым порядком точности.

Пусть дана система двух дифференциальных уравнений I порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

и требуется найти её решение на отрезке  $[a, b]$ .

Разобьём отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей. Заменим исходную задачу разностной схемой для приближённого отыскания значений  $y$  и  $z$  в узлах сетки  $\omega = \{x_{i+1} = x_i + h \mid i = 0, n-1, h = (b - a)/n\}$ .

Решение системы будем искать в виде

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ z_{i+1} = z_i + \Delta z_i \end{cases},$$

где

$$\Delta y_i = (K_1^i + 2K_2^i + 2K_3^i + K_4^i)/6,$$

$$\Delta z_i = (l_1^i + 2l_2^i + 2l_3^i + l_4^i)/6.$$

Коэффициенты  $K^i$  и  $l^i$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} K_1^i &= hf(x_i, y_i, z_i) & l_1^i &= hg(x_i, y_i, z_i) \\ K_2^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^i}{2}, z_i + \frac{l_1^i}{2}\right) & l_2^i &= hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^i}{2}, z_i + \frac{l_1^i}{2}\right) \\ K_3^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^i}{2}, z_i + \frac{l_2^i}{2}\right) & l_3^i &= hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^i}{2}, z_i + \frac{l_2^i}{2}\right) \\ K_4^i &= hf\left(x_i + h, y_i + K_3^i, z_i + l_3^i\right) & l_4^i &= hg\left(x_i + h, y_i + K_3^i, z_i + l_3^i\right) \end{aligned}$$

Аналогичным образом поступают при решении задачи Коши для систем дифференциальных уравнений  $m$ -го порядка.

Пусть отыскивается вектор-функция

$$Y(x) = \{y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(m)}(x)\},$$

являющаяся решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy^{(s)}(x)}{dx} &= f^{(s)}(x, y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(m)}(x)), s = \overline{1, m}, \\ y^{(s)}(x_0) &= y_0^{(s)}, s = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Если обобщить на эту задачу приведенные ранее формулы метода Рунге-Кутты, то здесь они запишутся в форме

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(s)} &= y_n^{(s)} + \frac{1}{6}[k_1^{(s)} + 2k_2^{(s)} + 2k_3^{(s)} + k_4^{(s)}], \\ k_1^{(s)} &= hf(x_n, y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(m)}), \\ k_2^{(s)} &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n^{(1)} + \frac{1}{2}k_1^{(1)}, y_n^{(2)} + \frac{1}{2}k_1^{(2)}, \dots, y_n^{(m)} + \frac{1}{2}k_1^{(m)}\right), \\ k_3^{(s)} &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n^{(1)} + \frac{1}{2}k_2^{(1)}, y_n^{(2)} + \frac{1}{2}k_2^{(2)}, \dots, y_n^{(m)} + \frac{1}{2}k_2^{(m)}\right), \\ k_4^{(s)} &= hf(x_n + h, y_n^{(1)} + k_3^{(1)}, y_n^{(2)} + k_3^{(2)}, \dots, y_n^{(m)} + k_3^{(m)}), s = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

## Лекция 28. Многошаговые методы решения задачи Коши (4ч. – 2ч. ЛК+2ч. ЛР)

1. Метод Адамса. Алгоритм применения метода. Выбор шага расчета. Вывод формул для работы на ЭВМ.
2. Достоинства и недостатки многошаговых методов.
3. Метод Адамса для решения систем дифференциальных уравнений второго порядка.

В лекциях 26, 27 были рассмотрены одношаговые методы решения задач с начальными условиями. У этих методов есть существенный недостаток: при их построении предполагается привлекать информацию о решаемой задаче только на отрезке длиной в один шаг, поэтому подобная информация на каждом этапе процесса должна быть, вообще говоря, получена заново, что предполагает большую трудоемкость соответствующих вычислительных правил. Отказавшись от требования одношаговости, можно вычислительные методы строить так, чтобы часть полученной информации могла быть использована повторно на нескольких соседних шагах вычислительного процесса. Таким многошаговым методом является **метод Адамса**. Этот метод разработан Адамсом в 1855 году по просьбе известного английского артиллериста Башфорта, занимавшегося внешней баллистикой. Впоследствии этот метод был забыт и вновь открыт в начале века норвежским математиком Шрермером.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (5.7) с начальным условием (5.8). Пусть  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) система равноотстоящих значений с шагом  $h$  и  $y_i = y(x_i)$ . Очевидно, что

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx. \quad (5.14)$$

В силу второй интерполяционной формулы Ньютона

$$y(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

где  $q = \frac{x - x_n}{h}$ ,

с точностью до разностей четвертого порядка получаем

$$y' = y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y'_{i-3}, \quad (5.15)$$

где  $q = \frac{x - x_i}{h}$ .

Подставляя выражение (5.15) в формулу (5.14) и учитывая, что  $dx = h dq$ , будем иметь

$$\Delta y_i = h \int_0^1 \left( y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2 + q}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3 + 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y'_{i-3} \right) dq.$$

Отсюда, после интегрирования, получаем **экстраполяционную формулу Адамса**

$$\Delta y_i = hy'_i + \frac{1}{2} \Delta(hy'_{i-1}) + \frac{5}{12} \Delta^2(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8} \Delta^3(hy'_{i-3}). \quad (5.16)$$

Для начала процесса нужны **четыре** начальные значения  $y_0, y_1, y_2, y_3$  — так называемый **начальный отрезок**, который определяют, исходя из начального условия (5.8), каким-нибудь численным методом (например, методом Эйлера, методом Рунге-Кутты, разложением в ряд Тейлора). Например, воспользуемся разложением в ряд

$$y_i = y(x_0 + ih) = y_0 + y'_0(ih) + \frac{y''_0}{2}(ih)^2 + \dots \quad (i = 1, 2, 3).$$

Зная эти значения, из уравнения (5.7) можно найти значения производных  $y'_0, y'_1, y'_2, y'_3$  и составить таблицу разностей

$$\Delta(hy'_0), \Delta(hy'_1), \Delta(hy'_2), \quad \Delta^2(hy'_0), \Delta^2(hy'_1), \quad \Delta^3(hy'_0). \quad (5.17)$$

Дальнейшие значения  $y_i$  ( $i = 4, 5, \dots$ ) искомого решения можно шаг за шагом вычислять по формуле Адамса (5.16), пополняя, по мере необходимости, таблицу разностей (5.17).

Для контроля вычислений рекомендуется, вычислив первое приближение для  $\Delta y_i$  по формуле

$$\Delta y_i^{(1)} = hy'_i + \frac{1}{2} \Delta(hy'_{i-1}) + \frac{5}{12} \Delta^2(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8} \Delta^3(hy'_{i-3}),$$

определить  $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i^{(1)}$  и подсчитать конечные разности

$$\Delta(hy_i), \quad \Delta^2(hy_{i-1}), \quad \Delta^3(hy_{i-2}), \quad (5.18)$$

а затем найти второе приближение по более точной формуле (**интерполяционной формуле Адамса**)

$$\Delta y_i^{(2)} = hy'_i + \frac{1}{2} \Delta(hy'_i) - \frac{1}{12} \Delta^2(hy'_{i-1}) - \frac{1}{24} \Delta^3(hy'_{i-2}). \quad (5.19)$$

Если  $\Delta y_i^{(1)}$  и  $\Delta y_i^{(2)}$  отличаются лишь на несколько единиц последнего сохраняемого десятичного разряда, то можно положить  $\Delta y_i = \Delta y_i^{(2)}$ , а затем, найдя  $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ , перевычислить конечные разности (5.18). После этого следует снова найти  $\Delta y_i^{(2)}$  по формуле (5.19). Поэтому шаг  $h$  должен быть таким, чтобы этот пересчет был излишним. На практике шаг  $h$  выбирают столь малым, чтобы можно было пренебречь членом  $\frac{1}{24} \Delta^3(hy'_{i-2})$  в формуле (5.19).

Если же расхождение  $\Delta y_i^{(1)}$  и  $\Delta y_i^{(2)}$  значительно, то следует уменьшить шаг  $h$ . Обычно его уменьшают в **два** раза.

Для работы на ЭВМ формулы Адамса удобнее применять в другой форме, выражая  $y_{i+1}$  не через  $\Delta hy'$ , а непосредственно через величины  $hy'$ . Учитывая, что



$$\begin{aligned}\Delta y'_{i-1} &= y'_i - y'_{i-1}, & \Delta^2 y'_{i-2} &= y'_i - 2y'_{i-1} + y'_{i-2}, \\ \Delta^3 y'_{i-3} &= y'_i - 3y'_{i-1} + 3y'_{i-2} - y'_{i-3},\end{aligned}$$

после приведения подобных членов будем иметь:

– для **экстраполяционной** формулы Адамса

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}), \quad (5.16^*)$$

– для **интерполяционной** формулы Адамса

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9y'_{i+1} + 19y'_i - 5y'_{i-1} + y'_{i-2}), \quad (5.19^*)$$

причем  $x_{i+1} = x_i + h$ .

Метод Адамса легко распространяется на системы дифференциальных уравнений и дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка. Пусть, например, дана система

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Тогда, применяя экстраполяционную формулу Адамса (5.16), получим

$$\begin{aligned}\Delta y_i &= hy'_i + \frac{1}{2}\Delta(hy'_{i-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hy'_{i-3}), \\ \Delta z_i &= hz'_i + \frac{1}{2}\Delta(hz'_{i-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(hz'_{i-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hz'_{i-3}),\end{aligned}$$

где  $hy'_i = h f_1(x_i, y_i, z_i)$ ,  $hz'_i = h f_2(x_i, y_i, z_i)$ .

Окончательно будем иметь

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ z_{i+1} = z_i + \Delta z_i. \end{cases}$$

### Особенности метода Адамса

**Преимущества** метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутты:

- экономичность;
- наглядный контроль – по последним конечным разностям можно судить о точности результата.

**Недостатком** метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутты является его многошаговость, то есть то, что решение в следующей точке зависит от решения в нескольких предыдущих точках, и они должны быть равноотстоящими.

**Достоинством** многошаговых методов Адамса при решении ОДУ заключается в том, что в каждом узле рассчитывается только одно значение правой части ОДУ – функции  $f(x, y)$ . **К недостаткам** можно отнести невозможность старта многошагового метода из единственной начальной точки, так как для вычислений по  $k$ -шаговой формуле необходимо знание значения функции в  $k$  узлах. Поэтому приходится  $(k-1)$  решение в первых узлах  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  получать с помощью какого-либо одношагового метода,

Например, метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

Другой проблемой является невозможность изменения шага в процессе решения, что легко реализуется в одношаговых методах.

ВМИП Лекции по ЧМ ПМ

## **Тема 6. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений**

### **Лекция 29. Общие понятия в теории конечно-разностных методов (2ч. УСР)**

1. Постановка задачи. Основные определения и примеры краевых задач. Понятие о линейной краевой задаче.
2. Двухточечная краевая задача.
3. Обзор методов приближенного решения краевых задач.

Материал для изучения находится в файле «УСР по ЧМ ПМ.pdf».

### Лекция 30. Метод конечных разностей (МКР) (4ч. – 2ч. ЛК+2ч. ЛР)

1. Сведение краевой задачи к системе конечно-разностных уравнений.
2. Понятие об аппроксимации на границах на двухточечном шаблоне.
3. Понятие об аппроксимации на границах на трехточечном шаблоне.
4. Метод прогонки прямой и обратный ход. Повышение точности.
5. МКР (метод сеток) для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка (6.3) с линейными краевыми условиями (6.4).

Одним из наиболее простых методов решения этой краевой задачи является **метод конечных разностей**, т.е. сведение её к системе **конечно-разностных уравнений**.

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей длины  $h = \frac{b-a}{n}$  (шаг). Точки разбиения имеют абсциссы

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

Введем обозначения  $y_i = y(x_i)$ ,  $y'_i = y'(x_i)$ ,  $y''_i = y''(x_i)$ ,  $p_i = p(x_i)$ ,  $q_i = q(x_i)$ ,  $f_i = f(x_i)$ .

Заменяя производные в задаче (6.3) – (6.4) симметричными (центральными) конечно-разностными отношениями для внутренних точек  $x_i$  отрезка  $[a, b]$ , получим

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (6.5)$$

Для концевых точек  $x_0 = a$  и  $x_n = b$ , положим

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \quad (6.6)$$

(6.6) – есть аппроксимация на границах на **двухточечном шаблоне**.

Погрешность такой замены составляет в этом случае  $O(h)$ . Однако, если функция  $y = y(x)$  достаточно гладкая, то можно положить

$$y'_0 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \quad y'_n = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} \quad (n \geq 2). \quad (6.7)$$

(6.7) – есть аппроксимация на границах на **трехточечном шаблоне**.

Действительно, полагая  $y_1 = y(x_0 + h)$  и  $y_2 = y(x_0 + 2h)$ , и применяя формулу Тейлора, получим

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0 + \dots, \\ y_2 &= y_0 + 2hy'_0 + \frac{(2h)^2}{2!} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0 + \dots \end{aligned}$$

Умножая первое равенство на 4, и складывая результат со вторым равенством, будем иметь

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = y'_0 + O(h^2),$$

где  $O(h^2)$  обозначена величина порядка  $h^2$ .

Аналогично показывается справедливость второй формулы из (6.7).

Таким образом, используя формулы (6.5) и (6.7), **краевая задача (6.3) – (6.4) запишется в виде**

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (6.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} &= A \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} &= B \end{aligned} \right\}. \quad (6.9)$$

Если же воспользоваться формулами (6.6), то вместо (6.9) краевые условия примут вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= B \end{aligned} \right\}. \quad (6.10)$$

Равенства (6.8) – (6.9) или (6.8) – (6.10) дают линейную систему  $n+1$  уравнений с  $n+1$  неизвестными  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ , представляющими собой значения искомой функции  $y = y(x)$  в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Решив эту систему, если это возможно, получим таблицу значений искомой функции  $y$ .

Оценка погрешности МКР для задачи (6.3) – (6.4) имеет вид

$$|y_i - y(x_i)| \leq \frac{h^2 M_4}{96} (b-a)^2,$$

где  $y(x_i)$  – значение точного решения при  $x = x_i$ ,  $M_4 = \max_{[a,b]} |y^{(4)}(x)|$ .

**Метод прогонки.** При применении метода конечных разностей к краевым задачам для дифференциальных уравнений второго порядка получается «трёхчленная система» линейных алгебраических уравнений, каждое из которых содержит три соседних неизвестных. Для решения такой системы разработан специальный метод – **прогонки**.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (6.3) с двухточечными краевыми условиями (6.4). От дифференциального уравнения (6.3) перейдем к конечно-разностному уравнению. Для этого разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Полагая  $x_i = x_0 + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ),  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  и вводя обозначения  $y_i = y(x_i)$ ,  $y'_i = y'(x_i)$ ,  $y''_i = y''(x_i)$ ,  $p_i = p(x_i)$ ,  $q_i = q(x_i)$ ,  $f_i = f(x_i)$ , для внутренних точек  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) отрезка  $[a, b]$  вместо дифференциального уравнения (6.3)

получаем систему конечно-разностных уравнений (6.8). После некоторых преобразований, (6.8) запишется в следующем виде

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = g_i h^2 \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad (6.11)$$

где

$$m_i = -\frac{2 - q_i h^2}{1 + 0.5 p_i h}, \quad n_i = \frac{1 - 0.5 p_i h}{1 + 0.5 p_i h}, \quad g_i = \frac{f_i}{1 + 0.5 p_i h}.$$

Для производных на концах  $x_0 = a, x_n = b$  берем односторонние производные (6.6). Тогда согласно условиям (6.4), получим (6.10).

Полученная линейная система (6.11) – (6.10) состоит из  $n+1$  уравнений первой степени относительно  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Эту систему можно решить обычным способом. Сейчас мы опишем другой, более короткий путь решения, получивший название **метода прогонки**.

Разрешая (6.11) относительно  $y_i$ , получим

$$y_i = \frac{g_i}{m_i} h^2 - \frac{1}{m_i} y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i} y_{i-1}.$$

Предположим, что с помощью полной системы (6.11) – (6.10) из последнего равенства исключена величина  $y_{i-1}$ . Тогда оно примет вид

$$y_i = c_i (d_i - y_{i+1}), \quad (6.12)$$

где  $c_i$  и  $d_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) – некоторые коэффициенты.

Полагая в (6.12)  $i=i-1$ , получим  $y_{i-1} = c_{i-1} (d_{i-1} - y_i)$ . Подставим это выражение в (6.11), будем иметь

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i c_{i-1} (d_{i-1} - y_i) = g_i h^2.$$

Откуда следует, что

$$y_i = \frac{(g_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}) - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}}. \quad (6.13)$$

Сравнивая формулы (6.12) и (6.13), получим для определения  $c_i$  и  $d_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) следующие рекуррентные формулы:

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \quad d_i = g_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}. \quad (6.14)$$

Определим теперь  $c_0$  и  $d_0$ . Из первого краевого условия (8.10) получаем

$$y_0 = \frac{Ah - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}. \quad (6.14')$$

С другой стороны, из формулы (6.12) при  $i=0$  имеем  $y_0 = c_0 (d_0 - y_1)$ . Сравнивая эти два равенства, получим

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}. \quad (6.15)$$

На основании формул (6.14) и (6.15) последовательно находим все коэффициенты  $c_i$  и  $d_i$  ( $i = 0, 2, \dots, n-1$ ) до  $c_{n-1}$  и  $d_{n-1}$  включительно. Формулы (6.14) и (6.15) определяют **прямой ход метода прогонки**.

**Обратный ход метода прогонки** начинается с определения  $y_n$ . Используя второе краевое условие из (6.10) и формулу (6.12) при  $i = n-1$ , получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \\ y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n). \end{cases}$$

Решая эту систему относительно  $y_n$  ( $y_{n-1}$  подставить в первое уравнение системы и затем выразить  $y_n$ ), получим

$$y_n = \frac{Bh + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 (c_{n-1} + 1)}.$$

Используя уже известные числа  $c_{n-1}, d_{n-1}$ , находим значение  $y_n$ . Затем вычисляем значения  $y_i$ , ( $i = n-1, \dots, 1$ ) по формулам (6.12): находим последовательно  $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ . Значение  $y_0$  находим из (6.14').

Таким образом, все вычисления как бы «прогоняются» два раза. Вычисления прямого хода заготавливают вспомогательные числа  $c_i, d_i$ , в порядке возрастания индекса  $i$ . При этом для вычисления значений  $c_0$  и  $d_0$  используется краевое условие на левом конце отрезка интегрирования. Затем на первом шаге обратного хода происходит согласование полученных чисел  $c_{n-1}, d_{n-1}$  с краевым условием на правом конце отрезка интегрирования, после чего последовательно получают значения искомой функции  $y_i$  – в порядке убывания индекса  $i$ .

Если пользоваться трехчленными формулами (6.9) для аппроксимации граничных условий (6.4) (это даёт более точные результаты), то для определения  $c_0$  и  $d_0$  имеем равенства

$$c_0 = \frac{(m_1 + 4)\alpha_1}{(n_1 - 3)\alpha_1 + 2\alpha_0 h}, \quad d_0 = \frac{(2A + \alpha_1 g_1 h)h}{(m_1 + 4)\alpha_1}.$$

Остальные значения  $c_i$  и  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) находятся по формулам (6.14).

Для обратного хода метода прогонки значение  $y_n$  определяется по формуле (используя второе краевое условие (6.9) и формулы (6.12), взятые при  $i = n-2$ , и  $i = n-1$ , получается система трех уравнений)

$$y_n = \frac{2Bh + \beta_1 [(4 + c_{n-2})c_{n-1}d_{n-1} - c_{n-2}d_{n-2}]}{\beta_1 [3 + 4c_{n-1} + c_{n-2}c_{n-1}] + 2\beta_0 h}.$$

Значения  $y_i$  ( $i = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ ) вычисляются по формулам (6.12).

**МКР для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.** Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу. Пусть дано нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'' = f(x, y, y') \quad (6.16)$$

и линейные краевые условия (6.4)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B \end{aligned} \right\}. \quad (6.17)$$

Более общий случай рассмотрен в [18].

Разобьем отрезок  $[a, b]$  системой равноотстоящих узлов  $x_i = x_0 + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), где  $h = \frac{(b-a)}{n}$ . В задаче (6.16) – (6.17) заменим производные  $y'$  и  $y''$  соответствующими конечно-разностными эквивалентами. Придем к следующей разностной задаче

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} &= f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}), \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ \alpha_0 y_0 - \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Равенства (6.18) представляют собой нелинейную систему  $n+1$  уравнения с  $n+1$  неизвестными  $y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Обозначим через

$$\Gamma_0(y) = \alpha_0 y_0 - \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} \text{ и } \Gamma_n(y) = \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Решение системы (6.18) находим методом итераций по следующим формулам

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1}^{(k+1)} - 2y_i^{(k+1)} + y_{i-1}^{(k+1)}}{h^2} &= f(x_i, y_i^{(k)}, \frac{y_{i+1}^{(k)} - y_{i-1}^{(k)}}{2h}), \\ \Gamma_0(y^{(k+1)}) &= A, \quad \Gamma_n(y^{(k+1)}) = B. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Здесь  $k$  – номер итерации. Заметим, что на каждом шаге итераций приходится решать систему линейных алгебраических уравнений. Но используя специальный вид этой системы [8] запишем ее решение в явном виде

$$y_i^{(k+1)} = \frac{h}{\Delta} [A\beta_0(b-a) + A\beta_1 + \alpha_1 B] + \frac{i}{\Delta} (\alpha_0 B - A\beta_0) + h^2 \sum_{j=1}^{n-1} g_{ji} f_j^{(k)}, \quad (6.20)$$

где числа  $a, b, A, B, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  – известны,

причем

$$\Delta = \frac{1}{h} [\alpha_0 \beta_0 (b-a) + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0]$$

и

$$g_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} (j\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h})(i\beta_0 - \beta_0 n - \frac{\beta_1}{h}) & (j \leq i) \\ \frac{1}{\Delta} (i\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h})(j\beta_0 - \beta_0 n - \frac{\beta_1}{h}) & (j > i) \end{cases}.$$

Заметим, что в правой части (6.20) только  $f_j^{(k)}$  зависят от номера итерации  $k$ .



Таким образом, решение задачи (6.18) свелось к достаточно простой итерационной схеме.

ВМИП Лекции по ЧМ ПМ

## Тема 7. Приближенные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных

### Лекция 31. Метод сеток решения краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа (4ч. – 2ч. ЛК+2ч. ЛР)

1. Постановка задачи, основные определения. Идея метода сеток.
2. Аппроксимация дифференциальных уравнений разностными. Аппроксимация граничных условий.
3. Разрешимость разностных уравнений и способы их решений.
4. Оценка погрешности и сходимость метода сеток.
5. Метод прогонки при решении уравнения Пуассона.

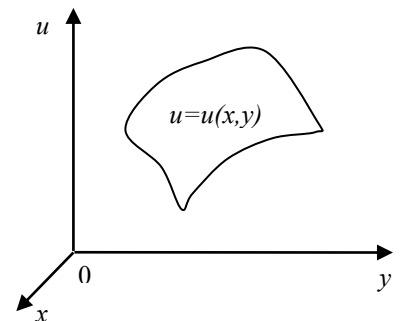
**Классификация уравнений второго порядка с двумя переменными.** Дифференциальные уравнения с частными производными имеют широкое применение в математической физике, гидродинамике, акустике т. д. В большинстве случаев эти уравнения в явном виде не решаются. Поэтому широкое распространение получили методы приближенного решения таких уравнений, в частности, **метод сеток**.

В общем случае **дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными** имеют вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \quad (7.1)$$

где  $x, y$  – независимые переменные,  $u$  – искомая функция,  $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$  – первые и вторые частные производные по  $x$  и  $y$ .

**Решением** уравнения (7.1) называется функция  $u = u(x, y)$ , обращающая это уравнение в тождество. График решения представляет собой интегральную поверхность в соответствующем пространстве (ОХУU см. рис).



Уравнение (7.1) называется **линейным**, если оно первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведений, т.е. если это уравнение может быть записано в виде

$$L(u) \equiv a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + l(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u = f(x, y). \quad (7.2)$$

Если коэффициенты  $a, b, c, d, l, g$  не зависят от  $x$  и  $y$ , то уравнение (7.2) является **линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами**.

Построение разностных схем метода сеток в случае уравнений с частными производными зависит от типа уравнений и вида граничных условий. Поэтому сделаем несколько замечаний о **классификации уравнений (7.2)**.

Пусть  $(x, y) \in \Omega \subset R^2$ , а  $\partial\Omega$  – граница области  $\Omega$ . Говорят, что в области  $\Omega$  задано дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для функции  $u = u(x, y)$ , если для любой точки из  $\Omega$  имеет место соотношение (7.2), в котором  $a(x, y), b(x, y), \dots$  – коэффициенты,  $f(x, y)$  – свободный член уравнения, которые определены в области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

Пусть  $D = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$ . Тогда уравнение (7.2) называют **эллиптическим, параболическим или гиперболическим** в области  $\Omega$ , если соответственно выполняются условия

$$D(x, y) < 0, \quad D(x, y) = 0, \quad D(x, y) > 0$$

для любой точки  $(x, y) \in \Omega$ . Если  $D(x, y)$  в области  $\Omega$  не сохраняет постоянного знака, то имеем так называемый **смешанный тип**.

С линейным дифференциальным уравнением (7.2) связано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)(dx)^2 = 0,$$

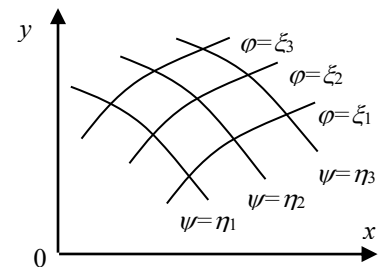
называемое **характеристическим уравнением**. Его решения называются **характеристиками уравнения (7.2)**.

Для уравнения (7.2) гиперболического типа существуют два семейства характеристик

$$\varphi(x, y) = C_1$$

и

$$\psi(x, y) = C_2 \quad (\text{см. рис}).$$



Производя в уравнении (7.2) преобразование координат

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

т.е. принимая параметры этих семейств за новые криволинейные координаты, будем иметь **канонический вид уравнения гиперболического типа**

$$u_{\xi\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Уравнение (7.2) параболического типа имеет одно семейство характеристик

$$\varphi(x, y) = C.$$

В результате преобразования  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = y$  уравнение параболического типа приводится к каноническому виду

$$u_{\eta\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Если уравнение (7.2) эллиптического типа, то оно допускает два семейства комплексных характеристик

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1, \quad \varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2.$$

Проводя преобразования  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \psi(x, y)$ , получим **канонический вид уравнения эллиптического типа**

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Построение и исследование разностных схем непосредственно для уравнения (7.2) связано с большими техническими трудностями. Поэтому будем рассматривать некоторые его частные случаи

### 1) Уравнение Пуассона (уравнение эллиптического типа)

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \text{ — неоднородное}$$

При  $f(x, y) = 0$  (однородное) имеем уравнение Лапласа.

### 2) Уравнение теплопроводности (уравнение параболического типа)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

### 3) Волновое уравнение (уравнение гиперболического типа)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

**Задача Коши.** Дифференциальное уравнение с частными производными имеет в общем случае бесконечное множество решений. Поэтому для однозначной разрешимости необходимо на искомое решение налагать дополнительные условия, которые состоят из начальных и краевых (граничных) условий. При этом условия, относящиеся к начальному моменту времени, называются **начальными**, а условия, относящиеся к фиксированным значениям координат (обычно это координаты граничных точек) — **краевыми**.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$L(u) = f(x, y), \tag{7.3}$$

$$\text{где } L(u) \equiv a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + l(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u.$$

Нахождение решения  $u = u(x, y)$  уравнения (7.3), удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x, y_0) = \varphi(x), \quad u'_y(x, y_0) = \psi(x), \tag{7.4}$$

называется **задачей Коши**, а сами условия — **начальными данными Коши**.

**Геометрическая интерпретация задачи Коши** достаточно проста: требуется найти интегральную поверхность  $u = u(x, y)$  уравнения (7.3), проходящую через данную пространственную кривую  $y = y_0, \quad u = \varphi(x)$

и касающуюся в точках  $M(x, y_0, u)$  этой кривой заданной системы векторов  $\vec{a}$ , расположенных в плоскостях  $x = \text{const}$  и составляющих с осью  $Oy$  угол  $\beta$ , определяемый равенством  $\text{tg} \beta = \psi(x)$ .

Если же рассматривать  $y$  как время, то задача Коши имеет следующую механическую трактовку: в начальный момент времени  $y = y_0$  заданы форма плоской линии  $u = \varphi(x, y_0)$  и распределение скоростей ее точек  $\frac{\partial u}{\partial y} = \psi(x, y_0)$ .

Предполагая, что каждая точка  $M(x, u)$  линии движется параллельно оси  $Ou$ , причем дифференциальный закон дается уравнением (7.3), требуется определить форму линии для последующих моментов времени  $y > y_0$ .

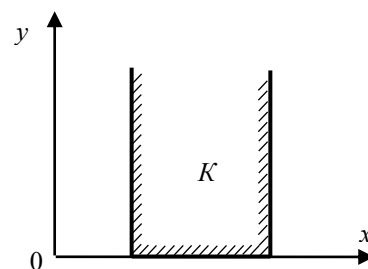
Можно ставить **общую задачу Коши**: найти решение  $u = u(x, y)$  дифференциального уравнения (7.3), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_y = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_y = \psi(x, y).$$

Далее, вместо производной  $u'_x$  можно задавать производную  $u'_y$ , или нормальную производную  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y)$ .

**Задача Коши обычно ставится для уравнений параболического и гиперболического типов.**

Пусть начальные данные Коши для уравнения (7.3) заданы на отрезке  $a \leq x \leq b$ , а решение  $u = u(x, y)$  этого уравнения нужно определить в полуполосе  $K \{a \leq x \leq b, 0 \leq y < \infty\}$ . (см. рис.) Тогда для однозначности этого решения необходимо дополнительно задать условия на прямых  $x = a$  и  $x = b$ , что приводит к смешанной задаче. Достаточно общей задачей этого типа является нахождение в полуполосе  $K$  решения  $u = u(x, y)$  дифференциального уравнения (7.3), удовлетворяющего начальным и граничным условиям:



$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_y(x, 0) = \psi(x) \quad (a \leq x \leq b, y = 0), \quad (7.5)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 u(a, y) + \alpha_1 u'_x(a, y) = \chi(y) \\ \beta_0 u(b, y) + \beta_1 u'_x(b, y) = \delta(y) \end{cases} \quad (7.6)$$

причем  $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ ,  $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ ,  $0 < y < \infty$ .

Решение смешанной задачи имеет практическую ценность лишь в том случае, если небольшие ошибки в начальных и краевых условиях не могут привести к большим отклонениям соответствующего решения. В этом случае говорят, что смешанная задача поставлена **корректно**, или непрерывно зависит от начальных и краевых условий.

**Для уравнения эллиптического типа задача Коши не ставится, т.к. является некорректной.**

## Краевые задачи для уравнений в частных производных

Пусть

$$L(u) \equiv \Delta u + au'_x + bu'_y + cu = f(x, y), \quad (7.7)$$

где  $a, b, c, f$  – непрерывные функции от  $(x, y)$ .

**Первая краевая задача.** На контуре  $\partial\Omega$ , ограничивающим область  $\Omega$ , задана непрерывная функция  $\varphi(P) = \varphi(x, y)$ . Требуется найти функцию  $u(P) = u(x, y)$ , удовлетворяющую внутри  $\Omega$  уравнению (7.7) и принимающую на границе заданные значения  $\varphi(P)$ :

$$\begin{aligned} L(u(P)) &= f(P), \quad P \in \Omega, \\ u(P) &= \varphi(P), \quad P \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Вторая краевая задача.**

$$\begin{aligned} L(u(P)) &= f(P), \quad P \in \Omega, \\ \frac{\partial u(P)}{\partial n} &= \psi(P), \quad P \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

где  $\vec{n}$  – вектор внешней нормали.

**Третья краевая задача.**

$$\begin{aligned} L(u(P)) &= f(P), \quad P \in \Omega, \\ \alpha_0 u(P) + \alpha_1 \frac{\partial u(P)}{\partial n} &= \chi(P), \quad P \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

где  $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ .

Если область  $G$  ограниченная, то соответствующая **краевая задача называется внутренней**, в противном случае – **внешней**.

Для уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  первая краевая задача называется **задачей Дирихле**, вторая – **задачей Неймана**, третья – **смешанной краевой задачей**.

Исследование стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность и др.) часто приводят к уравнениям эллиптического типа

$$L[u] \equiv \Delta u + au'_x + bu'_y + cu = f(x, y), \quad (7.8)$$

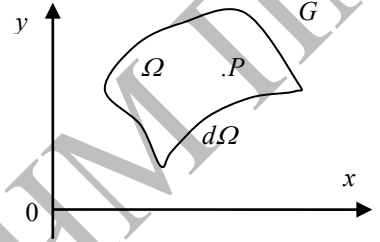
где  $a, b, c, f$  – непрерывные функции от  $x, y$ . Для этих уравнений обычно ставятся лишь краевые задачи, так как задача Коши для них может быть некорректной.

Ранее были приведены наиболее часто встречающиеся краевые задачи. А именно:

**Первая краевая задача.** Найти функцию  $u(P)$ , удовлетворяющую внутри области  $\Omega$  уравнению (7.8) и принимающую на границе области значение  $\varphi(P)$ , т. е.

$$\begin{aligned} L[u(P)] &= f(P), \quad P \in \Omega, \\ u(P) &= \varphi(P), \quad P \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Здесь  $\partial\Omega$  граница области  $\Omega$ .



**Вторая краевая задача.** Найти функцию  $u(P)$ , удовлетворяющую внутри области  $\Omega$  уравнению (7.8), нормальная производная которой на границе области принимает заданные значение  $\psi(P)$ , т. е.

$$L[u(P)] = f(P), \quad P \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = \psi(P), \quad P \in \partial\Omega.$$

**Третья краевая задача.** Найти функцию  $u(P)$  такую, чтобы

$$L[u(P)] = f(P), \quad P \in \Omega,$$

$$\alpha u(P) + \beta \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \chi(P), \quad P \in \partial\Omega,$$

где  $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ .

Если область  $\Omega$  ограниченная и  $P \in \Omega$ , то соответствующая краевая задача называется внутренней, в противном случае – внешней.

Для уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  первая краевая задача называется **задачей Дирихле**, вторая – **задачей Неймана** и третья – **смешанной краевой задачей**.

**Единственность решения задачи Дирихле**

**Определение.** Функция  $u(x, y)$ , имеющая непрерывные частные производные второго порядка в области  $\Omega$  и удовлетворяющая внутри области уравнению Лапласа ( $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ), называется **гармонической функцией**.

Задачу Дирихле можно сформулировать и так: найти функцию, непрерывную в данной замкнутой области  $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ , гармоническую в области  $\Omega$  и принимающую на ее границе  $\partial\Omega$  непрерывные заданные значения.

Единственность решения задачи Дирихле и ее непрерывная зависимость от краевых условий (корректность краевой задачи) вытекает из следующих свойств гармонических функций.

**Свойство 7.1.** (принцип максимума) Гармоническая в ограниченной области функция, непрерывная в замкнутой области  $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ , не может принимать внутри этой области значений больших, чем максимум ее значений на границе  $\partial\Omega$ , и меньших, чем минимум ее значений на  $\partial\Omega$ .

**Свойство 7.2.** (единственность задачи Дирихле) Задача Дирихле для замкнутой и ограниченной области может иметь лишь единственное решение.

**Доказательство.** Допустим, что две функции  $u_1(x, y)$  и  $u_2(x, y)$ , гармонические в области  $\Omega$ , совпадают всюду на ее границе. Рассмотрим функцию  $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ . Очевидно, что  $u(x, y)$  – гармоническая функция, обращающаяся в нуль на границе. По свойству 7.1 эта функция не может принимать внутри  $\Omega$  значений больше или меньше нуля, следовательно,  $u(x, y) \equiv 0$  внутри  $\Omega$  и  $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$ .

**Замечание.** Из свойства 7.2 не следует, что задача Дирихле для ограниченной и замкнутой области  $\Omega$  имеет решение; это свойство лишь

утверждает, что если существует решение задачи Дирихле для области  $\Omega$ , то оно единственно.

**Свойство 7.3.** (корректность задачи Дирихле) Решение задачи Дирихле для ограниченной и замкнутой области непрерывно зависит от граничных данных.

**Доказательство.** Допустим, что функции  $u_1(x, y)$  и  $u_2(x, y)$  являются решениями задачи Дирихле, соответственно принимающие на границе значения  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(x, y)$ .

Пусть всюду на границе  $\partial\Omega$  выполнено неравенство

$$|\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — произвольное малое положительное число. Рассмотрим гармоническую функцию  $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ . На границе  $\partial\Omega$  эта функция принимает значение  $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)$ . Так как  $-\varepsilon < \varphi(x, y) < \varepsilon$  на  $\partial\Omega$ , то по свойству 7.1 имеем  $-\varepsilon < u(x, y) < \varepsilon$  при  $(x, y) \in \Omega$ , т.е.  $-\varepsilon < u_1(x, y) - u_2(x, y) < \varepsilon$  или

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| < \varepsilon.$$

Таким образом, требование корректности для задачи Дирихле выполнено.

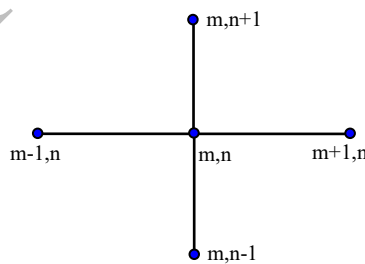
**Построение разностных аппроксимаций для уравнений.** Пусть область  $\Omega$  ограничена простой кусочно-гладкой линией  $\partial\Omega$ . Построим разностную аппроксимацию для уравнения Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (7.9)$$

Выберем прямоугольную сетку, в которой координаты узла  $(x_m, y_n)$  определяются  $\Omega_h = \{x_m = mh, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, y_n = nl, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h > 0, l > 0\}$ .

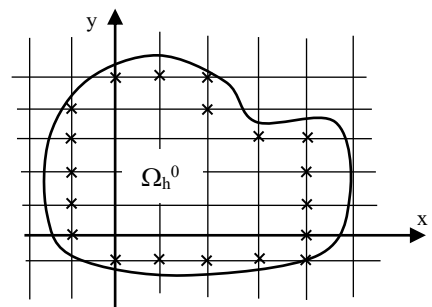
К сеточной области  $\Omega_h$  отнесем все узлы, принадлежащие  $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ .

Возьмем следующий пятиточечный шаблон (крест)



Пользуясь расположением точек в этом шаблоне, разобьем узлы области на две категории: **внутренние** и **граничные**.

Узел  $(m, n)$  будем считать внутренним, если он сам и четыре соседних точки шаблона принадлежат области  $\Omega_h$ . Множество таких узлов обозначим через  $\Omega_h^0$ . Остальные узлы назовем граничными и их множество обозначим через  $\partial\Omega_h$ . Таким образом,  $\Omega_h = \Omega_h^0 + \partial\Omega_h$ .





Заметим, что разбиение узлов области  $\Omega_h$  на внутренние и внешние зависит от того какой шаблон выбран для аппроксимации дифференциального уравнения.

Пусть узел  $(m, n) \in \Omega_h^0$ . Замену дифференциального уравнения (7.9) разностным будем осуществлять только во внутренних узлах. Имеем

$$u_{xx}|_{(x_m, y_n)} + u_{yy}|_{(x_m, y_n)} = f(x_m, y_n).$$

Воспользовавшись формулой Тейлора, после некоторых преобразований, получим

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \\ & + \frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1}))}{l^2} - \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})} = f(x_m, y_n) \end{aligned} \quad (7.10)$$

где  $(m, n) \in \Omega_h^0$ ,  $x_{m-1} < x_m^{(1)} < x_{m+1}$ ,  $y_{n-1} < y_n^{(1)} < y_{n+1}$ .

Пусть функции  $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4}$ ,  $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4}$  ограничены по абсолютной величине в области  $\bar{\Omega}$ , тогда при достаточно малых  $h$   $l$  можно пренебречь членами, содержащими  $h^2$  и  $l^2$ , получим искомое разностное уравнение

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (7.11)$$

где

$$\begin{aligned} L_h u^{(h)} & \equiv \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0, \\ f^{(h)} & = f(x_m, y_n). \end{aligned}$$

Здесь через  $u_{m,n}$  обозначено приближенное сеточное значение решения  $u(x, y)$  уравнения (3.2), т.е.  $u_{m,n} = u(x_m, y_n)$ .

В силу определения аппроксимации из (7.10) и (7.11) получаем

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \mathcal{F}^{(h)}, \quad (7.12)$$

где

$$\mathcal{F}^{(h)} \equiv \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0.$$

Следовательно, при сделанных выше предположениях относительно четвертых производных по  $x$  и  $y$ , имеет место оценка

$$\|\mathcal{F}^{(h)}\|_{F_h} \leq Mh^2, \quad (7.13)$$

где норма понимается как и ранее,  $M$  — постоянная не зависящая от  $h$ , и считаем, что  $l = \alpha h$ ,  $\alpha > 0$ .

Оценка (7.13) означает, что разностное уравнение (7.11) аппроксимирует дифференциальное уравнение (7.9) на решении  $u(x, y)$  с погрешностью порядка  $O(h^2)$ .

**Замечание.** Для уравнения Лапласа (в (7.9) положить  $f(x, y) = 0$ ) разностное уравнение (7.11) принимает вид

$$u_{m,n} = \frac{1}{4}(u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}),$$

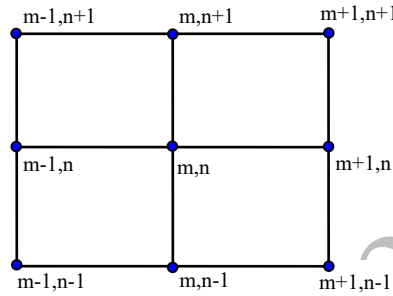
где  $h=l$  и  $(x_{m\pm 1}, y_{n\pm 1})$  – расчетные точки из области  $\Omega_h^0$ .

Теперь рассмотрим случай, когда эллиптическое уравнение имеет вид

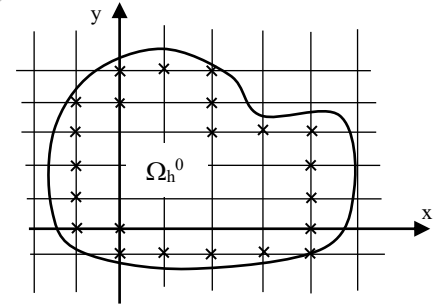
$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y), \quad (7.14)$$

причем  $a, b, c$  – постоянные величины и  $b^2 - ac < 0$ .

Для замены дифференциального уравнения разностным, выберем следующий девятиточечный шаблон (решетка)



Используя этот шаблон, выделим в области  $\Omega_h$  множество внутренних узлов  $\Omega_h^0$  и множество граничных узлов  $\partial\Omega_h$ . Будем считать узел  $(m, n)$  внутренним, если этот узел и восемь соседних с ним узлов, содержащихся в шаблоне, принадлежат  $\Omega_h$ . Оставшиеся узлы области  $\Omega_h$  отнесем к граничным и их множество обозначим через  $\partial\Omega_h$ .



Запишем разностные выражения для замены смешанной производной  $u_{xy}$  через центральные разности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_m, y_n)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{(x_m, y_n)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_{m+1}, y_n)} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_{m-1}, y_n)}}{2h} + O(h^2) = \\ &= \frac{1}{2h} \left[ \frac{u(x_{m+1}, y_{n+1}) - u(x_{m+1}, y_{n-1})}{2l} + O(l^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{u(x_{m-1}, y_{n+1}) - u(x_{m-1}, y_{n-1})}{2l} \right] + O(l^2) = \\ &= \frac{u(x_{m+1}, y_{n+1}) - u(x_{m+1}, y_{n-1}) - u(x_{m-1}, y_{n+1}) + u(x_{m-1}, y_{n-1})}{4hl} + O(h^2 + l^2). \end{aligned}$$

Будем полагать, что  $\frac{l}{h} = \text{const}$ . Теперь, аналогично тому, как было построено разностное уравнение (7.11), построим для уравнения (7.14) разностное уравнение, обладающее аппроксимацией порядка  $O(h^2 + l^2)$ . Имеем

$$a \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + 2b \frac{u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n-1} - u_{m-1,n+1} + u_{m-1,n-1}}{4hl} +$$

$$+ c \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2} = f(x_m, y_n), \quad (m, n) \in \Omega_h^0$$

**Виды граничных условий.** Для уравнений эллиптического типа могут ставиться на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  следующие граничные условия:

1) Первого рода:

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(y), \quad y \in \partial\Omega. \quad (7.15)$$

2) Второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \psi(y), \quad y \in \partial\Omega, \quad (7.16)$$

здесь  $n$  – внешняя нормаль.

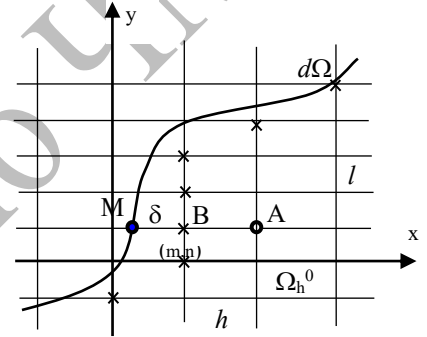
3) Третьего рода:

$$\left[ \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x, y) u \right]_{\partial\Omega} = \chi(y), \quad (7.17)$$

где  $\alpha, \beta, \varphi$  – известные функции.

Рассмотрим замену граничных условий (7.15), (7.16) разностными условиями. Отметим, что эти условия заменяются разностными условиями на множестве граничных узлов  $\partial\Omega_h$ .

Пусть  $(m, n)$  – некоторый узел из  $\partial\Omega_h$  – узел  $B$ .  $(m+1, n)$  – внутренний узел, ближайший к  $B$  по направлению  $x$  – узел  $A$ . Буквой  $M$  обозначим точку контура  $\partial\Omega$ , ближайшую к  $B$  по направлению оси  $x$ . Аналогично можно поступать и в том случае, когда ближайшая к  $B$  точка будет лежать в направлении оси  $y$ .



Координаты этих точек таковы:  $M(x_m - \delta, y_n)$  ( $0 < \delta < h$ ),  $B(x_m, y_n)$ ,  $A(x_{m+1}, y_n)$ . Тогда согласно (7.15) можно положить

$$u_{mn} = \varphi(M) \quad (7.18)$$

для узлов  $(m, n) \in \partial\Omega_h$ .

**Точность вычислений.** Определим погрешность формулы (7.18)

$$\varphi(M) = u(x_m - \delta, y_n) = u(x_m, y_n) - \frac{\delta}{1!} u_x \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)}, \quad x_m - \delta < x_m^{(1)} < x_m.$$

Откуда

$$u(x_m, y_n) - \varphi(M) = u(x_m, y_n) - u_{mn} = \frac{\delta}{1!} u_x \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)}.$$

Теперь видно, что погрешность формулы (7.18) будет иметь первый порядок относительно  $h$ , если предположить, что  $\delta = kh$ ,  $k > 0$  – постоянная величина. Если точки  $M$  и  $B$  совпадают, то формула (7.18) будет точной.

**Процесс усреднения Либмана.** Точность вычисления  $u_{mn}$  при  $(m, n) \in \partial\Omega_h$  можно повысить, если воспользоваться еще значением  $u(x, y)$  в точке  $A$  (процесс Либмана). Имеем

$$u(M) = u(x_m - \delta, y_n) = u(B) - \frac{\delta}{1!} u_x|_{(B)} + \frac{\delta^2}{2!} u_{xx}|_{(\tilde{B})}, \quad (7.19)$$

где точка  $\tilde{B}$  лежит между точками  $M$  и  $B$ ,

$$u(A) = u(x_m + h, y_n) = u(B) + \frac{h}{1!} u_x|_{(B)} + \frac{h^2}{2!} u_{xx}|_{(\tilde{A})}, \quad (7.20)$$

где точка  $\tilde{A}$  лежит между точками  $A$  и  $B$ . Исключив из (7.19)  $u_x|_{(B)}$  с помощью формулы (7.20), получим

$$u(B) = \frac{h\varphi(M) + \delta u(A)}{h + \delta} + O(h^2).$$

Отбросив величину  $O(h^2)$ , получим разностное граничное условие, аппроксимирующее граничное условие (7.15) в узле  $(m, n) \in \partial\Omega_h$  с погрешностью порядка  $O(h^2)$

$$u(B) = \frac{h\varphi(M) + \delta u(A)}{h + \delta}. \quad (7.21)$$

Формулы вида (7.18), (7.21) могут быть записаны для любого узла  $(m, n) \in \partial\Omega_h$ .

Обратимся теперь к задаче (7.16). Рассмотрим граничный узел  $B$  с координатами  $(x_m, y_n)$ ,  $M$  – ближайшая к  $B$  точка контура  $\partial\Omega$ ,  $A$  – внутренний узел с координатами  $(x_{m-1}, y_n)$ ,  $C$  – граничный узел с координатами  $(x_m, y_{n-1})$  и  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к  $\partial\Omega$  в точке  $M$ . Далее  $\alpha = \angle(Ox, \vec{n})$ ,  $\beta = \angle(\vec{n}, Oy)$ .

Легко видеть, что  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Заменим граничное условие (7.16) разностным в граничном узле  $B$ . По определению, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha.$$

Предположим, что в точке  $B$  направление нормали  $\vec{n}$  сохраняется таким же, как в точке  $M$ . Поскольку расстояние между точками  $M$  и  $B$  есть величина порядка  $O(h)$ , то это предположение связано с внесением погрешности того же порядка  $O(h)$ . Значит

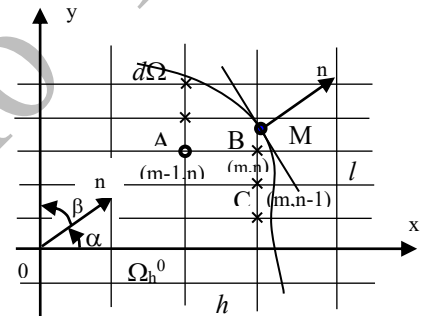
$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{(M)} \approx \frac{\partial u}{\partial n}|_{(B)}.$$

Поэтому будем иметь

$$\frac{u(x_m, y_n) - u(x_{m-1}, y_n)}{h} \cos \alpha + \frac{u(x_m, y_n) - u(x_m, y_{n-1})}{l} \sin \alpha + O(h + l) = \varphi(M).$$

Отбрасывая погрешность, получим сеточное уравнение

$$\frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{h} \cos \alpha + \frac{u_{mn} - u_{m,n-1}}{l} \sin \alpha = \varphi(M). \quad (7.22)$$



Формула (7.22) есть искоемое разностное уравнение, аппроксимирующее в узле  $(m,n) \in \partial\Omega_h$  граничное условие (7.16) с погрешностью порядка  $O(h+l)$ . Выражения (7.22) должны быть записаны для всех граничных узлов  $(m,n) \in \partial\Omega_h$ , после чего будут получены разностные граничные условия, аппроксимирующие граничное условие (7.16).

Как видим процесс замены граничных условий разностными может оказаться громоздкой и сложной задачей, особенно если контур  $\partial\Omega$  имеет непростую форму.

Замена граничных условий вида (7.17) может быть осуществлена с помощью формул вида (7.18), (7.21), (7.22).

Вопросы сходимости и устойчивости разностных схем для уравнений эллиптического типа рассмотрим на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

**Построение разностной схемы задачи Дирихле для уравнения Пуассона.** Пусть в области  $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$  задано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (7.23)$$

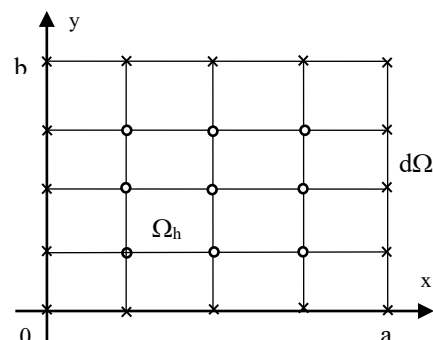
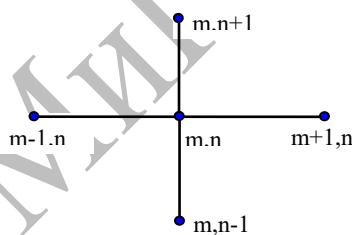
а на границе  $\partial\Omega$  этой области – условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(M), \quad (7.24)$$

где  $\varphi$  – известная функция, точка  $M \in \partial\Omega$ . Будем считать, что задача (7.23), (7.24) имеет единственное решение  $u(x, y)$  в области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  и это решение имеет непрерывные производные  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ .

Введем в области  $\Omega$  прямоугольную сетку. К множеству внутренних узлов  $\Omega_h$  относятся все узлы, лежащие в  $\Omega$ , а к множеству граничных узлов  $\partial\Omega_h$  относятся все узлы, лежащие на границе  $\partial\Omega$  области  $\bar{\Omega}$ .

Для аппроксимации уравнения (7.23) выберем пятиточечный шаблон – крест



Замену дифференциального уравнения разностным уравнением будем осуществлять только во внутренних узлах сетки. В результате получим

$$u''_{xx}|_{(x_m, y_n)} + u''_{yy}|_{(x_m, y_n)} = f(x_m, y_n).$$

Используя формулу Тейлора, после некоторых преобразований, будем иметь

$$\frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} +$$

$$+ \frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1}))}{l^2} - \frac{l^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})} = f(x_m, y_n),$$

где  $(m, n) \in \Omega_h^0$ ,  $x_{m-1} < x_m^{(1)} < x_{m+1}$ ,  $y_{n-1} < y_n^{(1)} < y_{n+1}$ .

Пусть функции  $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4}$  и  $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4}$  ограничены по абсолютной величине в области  $\bar{\Omega}$ . Тогда при достаточно малых  $h$  и  $l$  можно пренебречь членами, содержащими  $h^2$  и  $l^2$ . В результате получаем следующее разностное уравнение

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \mathcal{J}^{(h)}, \quad (7.25)$$

где

$$\mathcal{J}^{(h)} \equiv \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0.$$

Условие на границе (7.24) аппроксимируется точно

$$u_{mn} = \varphi(x_m, y_n), \quad (mh, nl) \in \partial\Omega_h.$$

В результате получаем разностную схему, аппроксимирующую задачу (7.23), (7.24) с погрешностью порядка  $O(h^2 + l^2)$

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (7.26)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0,$$

$$f^{(h)} \equiv f(x_m, y_n).$$

Разностная схема (7.26) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, причем число уравнений и число неизвестных  $u_{mn}$  равно  $(M-1) \times (N-1)$ .

**Об устойчивости разностной схемы.** Доказательство устойчивости разностной схемы (7.26) сводится к доказательству следующих двух свойств:

1) Разностная схема

$$L_h z^{(h)} = g^{(h)}, \quad \text{где } g^{(h)} \equiv \begin{cases} \alpha_{mn} \\ \beta_{mn} \end{cases},$$

$g^{(h)}$  — произвольный элемент из  $F_h$ , однозначно разрешима.

2) Имеет место оценка

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|g^{(h)}\|_{F_h},$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $h$  и  $g^{(h)}$ . Нормы в пространствах имеют вид

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} = \max_{m,n} |z_{mn}|, \quad \|g^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |\alpha_{mn}| + \max_{m,n} |\beta_{mn}|.$$

Обозначим

$$\Lambda_h u^{(h)} \equiv \Lambda_{xx} u^{(h)} + \Lambda_{yy} u^{(h)}.$$

**Лемма 7.1.** Пусть  $v^{(h)} = \{v_{mn}\}$ , ( $v_{mn}$  — не тождественная константа) некоторая сеточная функция, определенная на  $\Omega_h = \Omega_h^0 \cup \partial\Omega_h$ . Если выполняется условие  $\Lambda_h v^{(h)}|_{(x_m, y_n)} \geq 0$ , где  $(x_m, y_n) \in \Omega_h^0$ , то  $v^{(h)}$  достигает своего наибольшего значения на  $\Omega_h$  в граничных точках, т.е. на  $\partial\Omega_h$ .

**Лемма 7.2.** Пусть  $v^{(h)} = \{v_{mn}\}$ , ( $v_{mn}$  — не тождественная константа) некоторая сеточная функция, определенная на  $\Omega_h = \Omega_h^0 \cup \partial\Omega_h$ . Если выполняется условие  $\Lambda_h v^{(h)}|_{(x_m, y_n)} \leq 0$ , где  $(x_m, y_n) \in \Omega_h^0$ , то  $v^{(h)}$  достигает своего наименьшего значения на  $\Omega_h$  в граничных точках, т.е. на  $\partial\Omega_h$ .

**Теорема (принцип максимума).** Каждое решение разностного уравнения

$$\Lambda_h v^{(h)}|_{(x_m, y_n)} = 0, \quad (x_m, y_n) \in \Omega_h^0,$$

принимает свое наибольшее и наименьшее значение в некоторых точках границы  $\partial\Omega_h$ .

Эта теорема применяется к доказательству однозначной разрешимости разностной схемы  $L_h z^{(h)} = g^{(h)}$  для любого  $g^{(h)} \in F_h$ . С этой целью рассматривается однородная разностная схема  $L_h z^{(h)} = 0$  и показывается, что она имеет только нулевое решение  $z^{(h)} = 0$ . Отсюда и будет следовать однозначная разрешимость разностной схемы (7.26).

**Метод матричной прогонки.** Для решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при аппроксимации задачи (7.23), (7.24) разностной схемой (7.26), используется метод матричной прогонки.

Перепишем разностную схему (7.26)

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}, & m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \\ u_{mn}, & (mh, nl) \in \partial\Omega_h \end{cases} \quad f^{(h)} = \begin{cases} f(x_m, y_n) \\ \varphi(x_m, y_n) \end{cases}. \quad (7.27)$$

в следующем виде

$$\begin{aligned} u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n} + \alpha(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}) &= h^2 f(x_m, y_n) \\ (m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1), \\ u_{0n} &= \varphi(0, y_n), \quad u_{Mn} = \varphi(a, y_n) \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_{m0} &= \varphi(x_m, 0), \quad u_{mN} = \varphi(x_m, b) \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad \alpha^2 = \frac{h^2}{l^2} > 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Пусть  $M \gg N$ . Введем обозначение

$$u_m = \begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ \vdots \\ u_{mN-1} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (7.29)$$

Положим в формулах (7.28)  $n = 1, 2, \dots, N-1$ , и, учитывая (7.29), запишем систему уравнений (7.28) в векторной форме:

$$\begin{cases} u_{m+1} + Au_m + u_{m-1} = f_m, & m = 1, 2, \dots, M-1, \\ u_0 = \varphi_0, & u_M = \varphi_a \end{cases}, \quad (7.30)$$

где  $A$  – трехдиагональная матрица порядка  $N-1$  вида

$$A = \begin{pmatrix} -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2+2\alpha) \end{pmatrix},$$

$$f_m = \begin{pmatrix} h^2 f(x_m, y_1) - \alpha \varphi(x_m, 0) \\ h^2 f(x_m, y_2) \\ \dots \dots \dots \\ h^2 f(x_m, y_{N-2}) \\ h^2 f(x_m, y_{N-1}) - \alpha \varphi(x_m, b) \end{pmatrix}, \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix} \varphi(0, y_1) \\ \varphi(0, y_2) \\ \dots \\ \varphi(0, y_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad \varphi_a = \begin{pmatrix} \varphi(a, y_1) \\ \varphi(a, y_2) \\ \dots \\ \varphi(a, y_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Метод матричной прогонки для решения системы линейных алгебраических уравнений (7.30) можно описать следующим образом:

1) По формуле  $R_{m+1} = -(A + R_m)^{-1}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M-1$ , полагая  $R_1 = 0$ , вычисляем матрицы

$$R_m = (R_{ij}^{(m)})_1^{N-1}, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Затем по формуле  $S_{m+1} = R_{m+1}(S_m - f_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M-1$ , полагая  $S_1 = \varphi_0$ , вычисляем векторы  $S_m = (S_1^{(m)}, S_2^{(m)}, \dots, S_{N-1}^{(m)})^T$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ .

2) По формуле  $u_{m-1} = R_m u_m + S_m$ ,  $m = M, M-1, \dots, 1$ , полагая  $u_M = \varphi_a$ , последовательно определяются искомые значения решения задачи (7.30):  $u_M, u_{M-1}, \dots, u_1, u_0$ .

Указанный алгоритм устойчив к ошибкам округления, если для любого  $m$  выполняется условие  $\|R_m\|_{III} \leq 1$  (здесь норма матрицы есть корень квадратный из наибольшего собственного значения матрицы  $R_m^* R_m$ , где  $*$  означает переход к комплексно сопряженной и транспонированной матрице).

В описанном выше методе направление прогонки выбирается совпадающим с направлением оси  $Ox$ . Такое направление особенно выгодно брать при условии  $M \gg N$ , так как основной объем вычислений в методе прогонки приходится на определение матриц  $R_{m+1} = -(A + R_m)^{-1}$ . Этот объем вычислений будет тем меньше, чем меньше порядок матриц  $A + R_m$ .

Если задача (7.30) такая, что  $N \gg M$ , то алгоритм метода прогонки следует видоизменить, взяв за направление прогонки ось  $Oy$ .



## Лекция 32. Метод сеток решения линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа (4ч. – 2ч. ЛК+2ч. ЛР)

1. Постановка задачи, основные определения.
2. Метод сеток для решения задачи Коши. Оценка погрешности и сходимости метода сеток для неоднородного волнового уравнения.
3. Метод сеток решения смешанной задачи.

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (7.31)$$

где  $f(x, y)$  – известная дважды непрерывно дифференцируемая в области  $\Omega$  функция.

Будем рассматривать следующие задачи:

1) **Задача Коши.** В области  $\Omega = \{y > 0; -\infty < x < \infty\}$  найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию  $u(x, y)$ , которая в этой области удовлетворяла бы уравнению (4.1), а на прямой  $y=0$  – начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \psi(x), \quad (7.32)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – заданные функции.

2) **Смешанная граничная задача.** В области  $\Omega = \{y > 0; a < x < b\}$  найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую в области  $\Omega$  уравнению (7.31), а на границе области  $\partial\Omega$  при  $y=0$  – начальным условиям (7.32) и при  $x=a$  и  $x=b$  – одному из граничных условий:

а) первого рода:

$$u(a, y) = \mu_1(y), \quad u(b, y) = \mu_2(y). \quad (7.33)$$

б) второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \sigma_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = \sigma_2(y). \quad (7.34)$$

в) третьего рода:

$$\begin{aligned} \left[ \tau_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_2(y) u \right]_{x=a} &= \omega_1(y) \\ \left[ \delta_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2(y) u \right]_{x=b} &= \omega_2(y) \end{aligned}, \quad (7.35)$$

где  $\mu_i, \sigma_i, \tau_i, \delta_i, \omega_i$  ( $i=1,2$ ) – известные функции, причем  $|\tau_1(y)| + |\tau_2(y)| > 0$ ,  $|\delta_1(y)| + |\delta_2(y)| > 0$ .

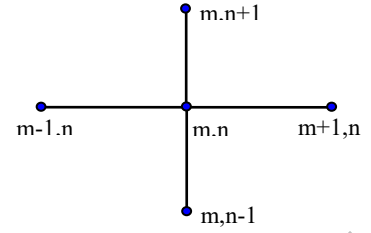
**Решение задачи Коши.** Для решения задачи Коши (7.31), (7.32) будем использовать метод сеток. Выберем прямоугольную сетку:

$$x_m = mh, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad y_n = nl, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad h > 0, \quad l > 0$$

и на этой сетке рассмотрим трехслойный пятиточечный шаблон вида крест.

В соответствии с выбранным шаблоном к множеству внутренних узлов относятся узлы  $(x_m, y_n) \in \Omega$ , а к  $\partial\Omega_h$  – узлы, лежащие на прямой  $y=0$ .

Используя выбранный шаблон, а также соответствующие формулы для замены вторых производных, получим следующую разностную схему:



$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (7.36)$$

где

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2} \\ u_m^0 \\ \frac{u_m^1 - u_m^0}{l} \end{cases}, \quad f^{(h)} = \begin{cases} f(x_m, y_n) \\ \varphi(x_m) \\ \psi(x_m) \end{cases}$$

причем  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $n=0, 1, 2, \dots$ .

Эта схема аппроксимирует уравнение (7.31) с погрешностью порядка  $O(h^2 + l^2)$ , а начальное условие – с погрешностью  $O(l)$ . Действительно, по определению погрешности аппроксимации получим

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \mathcal{E}^{(h)},$$

где  $[u]_h$  – значение точного решения задачи (7.31), (7.32) в узлах сетки  $\Omega_h$ , а  $\mathcal{E}^{(h)}$  – погрешность аппроксимации, которая имеет вид

$$\mathcal{E}^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, & x_{m-1} < x_m^{(1)} < x_{m+1}, \\ 0, & y_{n-1} < y_n^{(1)} < y_{n+1}, \\ \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, & y_0 < y_0^{(1)} < y_1, m=0, \pm 1, \dots; n=1, 2, \dots \end{cases}.$$

Если предположить, что решение задачи (7.31), (7.32) продолжимо в область  $\Omega = \{-l \leq y \leq 0, -\infty < x < +\infty\}$ , то порядок аппроксимации начальных условий можно повысить. Используя центральную разностную производную, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_m, 0)} = \frac{u(x_m, y_1) - u(x_m, y_{-1})}{2l} - \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{(x_m, y_0^{(2)})}, \quad y_{-1} = -l, -l < y_0^{(2)} < l.$$

Отбрасывая погрешность порядка  $O(l^2)$ , будем иметь

$$\frac{u_m^1 - u_m^{-1}}{2l} = \psi(x_m), \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.37)$$

Значение  $u_m^{-1}$  исключим из (7.37). Для этого используем само разностное уравнение при  $n=0$

$$\frac{u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0}{h^2} - \frac{u_m^1 - 2u_m^0 + u_m^{-1}}{l^2} = f(x_m, y_n).$$

В результате равенство (7.47) примет вид

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{l} = \psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(u_m^0) - \frac{l}{2} f(x_m, y_n),$$

где  $\Lambda_{xx}(u_m^0) \equiv \frac{u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0}{h^2}$ .

Таким образом, вместо разностной схемы (7.36) можно рассматривать разностную схему

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (7.38)$$

которая аппроксимирует задачу (7.31), (7.32) с погрешностью порядка  $O(h^2 + l^2)$ . Здесь оператор  $L_h$  — такой же как и ранее, а  $f^{(h)}$  определяется по формуле

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} f(x_m, y_n), & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 1, 2 \\ \varphi(x_m) & \\ \psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(u_m^0) - \frac{l}{2} f(x_m, y_n) & \end{cases}.$$

Представим разностное уравнение в схеме (7.38) в виде

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n + l^2 \Lambda_{xx}(u_m^n) - u_m^{n-1} - l^2 f(x_m, y_n), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.39)$$

Тогда численная реализация разностной схемы (7.38) проводится следующим образом:

Из (7.38) определяется решение на нулевом и первом слоях

$$\begin{aligned} u_m^0 &= \varphi(x_m), \\ u_m^1 &= \varphi(x_m) + l[\psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(\varphi(x_m)) - \frac{l}{2} f(x_m, y_0)], \quad m = 0, \pm 1, \dots \end{aligned} \quad (7.40)$$

Так как значения  $u_m^0$  и  $u_m^1$  известны, то по формуле (7.39) при  $n=1$  можно вычислить значение  $u_m^2$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Далее по формуле (7.39) определяется решение при  $n = 2, 3, 4, \dots$ .

Разностная схема (7.38) устойчива при  $l \leq h$ .

**Треугольник определенности.** Рассмотрим вопрос о связи  $\frac{l}{h} = \gamma > 0$ , т.е. каким может быть  $\gamma$  в случае гиперболического уравнения.

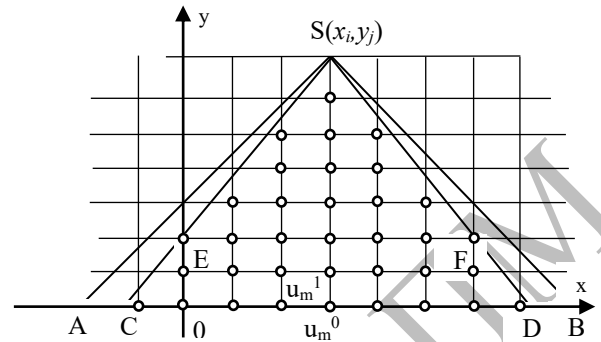
Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (7.31) с начальными условиями (7.32). Разностная схема (7.38) в этом случае запишется

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= \gamma^2 u_{m+1}^n + (2 - 2\gamma^2) u_m^n + \gamma^2 u_{m-1}^n - u_m^{n-1}, \\ u_m^0 &= \varphi(x_m), \quad u_m^1 = \varphi(x_m) + l\psi(x_m). \end{aligned} \quad (7.41)$$

Учитывая шаблон, значения  $u_i^j$  в конечном счете может быть выражено через значения  $u_m^0$  и  $u_m^1$ . Все эти значения находятся внутри  $\triangle SCD$ , причем  $\angle SDC = \arctg(-\gamma)$ , а  $\angle SCD = \arctg(\gamma)$ .

Треугольник  $\triangle SCD$  называют **треугольником определенности** разностной схемы (7.41).

Таким образом, значение  $u_i^j$  в точке  $S$  определяется разностным уравнением (7.41) и начальными значениями  $u_m^0 \in CD$  и  $u_m^1 \in EF$ .



Точное же значение решения  $u(x, y)$  этой задачи с начальными условиями (7.32), как известно из математической физики, определяется этим однородным уравнением и начальными условиями, содержащимися на отрезке, отсекаемом характеристиками, проходящими через точку  $S$ , на прямой  $y=0$ , т.е. на отрезке  $AB$ . Эти характеристики образуют соответственно углы  $\angle SAB = \frac{\pi}{4}$  и  $\angle SDB = \frac{3\pi}{4}$ . Треугольник  $SAB$  называется **треугольником определенности** дифференциального уравнения.

В случае, когда  $\angle SAB < \angle SCD$  и  $\operatorname{tg}(\angle SCD) = \gamma = \frac{l}{h} > 1$ , соотношение шагов оказывается неудачным, так как в этом случае  $\triangle SCD \subset \triangle ASB$ . И если мы каким-либо образом изменим начальные условия на отрезках  $AC$  и  $DB$ , то это может изменить и решение исследуемой задачи во всей области  $\Omega$ , в том числе и в точке  $S$ . Однако сеточное значение  $u_i^j$  в точке  $S$  от таких изменений зависеть не будет и остается прежним. Значит, в этом случае нельзя надеяться на сходимость решения разностной схемы (7.41), а значит эта разностная схема не может быть устойчивой. Значит, при  $\gamma > 1$  — устойчивости нет.

Но если  $\triangle ASB \subset \triangle SCD$ , то это означает, что  $\frac{l}{h} = \gamma \leq 1$ , и можно надеяться на устойчивость. Таким образом, в разностной схеме (7.41) для устойчивости необходимо положить  $\gamma \leq 1$ .

Заметим, что мысль о том, что треугольник определенности дифференциального уравнения должен содержаться в треугольнике определенности разностного уравнения, была высказана впервые Курантом, Фридрихсом и Леви.

**Решение смешанной задачи.** Пусть уравнение (7.31) задано в области  $\Omega = \{0 < y \leq Y < +\infty, a < x < b\}$ . Будем считать, что решение уравнения (7.31) удовлетворяет начальным условиям (7.32) при  $a \leq x \leq b$  и граничным условиям третьего рода (7.35).

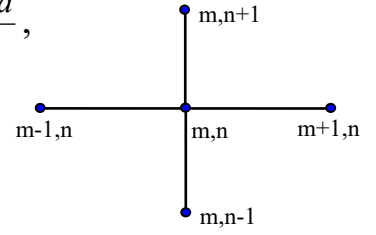
Предположим, что смешанная задача (7.31), (7.32), (7.35) имеет единственное решение в области  $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$  ( $\partial\Omega$  — контур области  $\Omega$ ), непрерывное вместе с четвертыми производными по  $x$  и  $y$  в области  $\bar{\Omega}$ .

Выберем в области  $\Omega$  прямоугольную и равномерную сетку

$$x_m = mh, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad h = \frac{b-a}{M},$$

$$y_n = nl, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad l > 0$$

и на этой сетке рассмотрим пятиточечный явный трехслойный шаблон



$$\Omega_h = \Omega_h^0 + \partial\Omega_h,$$

$$\Omega_h^0 = \{(x_m, y_n), \quad m = \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{1, N-1}\},$$

$$\partial\Omega_h = \{(x_m, y_n), \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad n = 0, n = N; \quad m = 0, m = M, \quad n = 0, 1, \dots, N\}.$$

На выбранном шаблоне уравнение (7.31) и начальные условия (7.32) аппроксимируются разностной схемой (7.38). Для замены граничных условий на прямых  $x=a$  и  $x=b$  воспользуемся формулами

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(m,n)} = \frac{u(x_{m+1}, y_n) - u(x_m, y_n)}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x_m^{(1)}, y_n)},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(m,n)} = \frac{u(x_m, y_n) - u(x_{m-1}, y_n)}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x_m^{(2)}, y_n)}.$$

Таким образом, соответствующие разностные граничные условия будут аппроксимировать (7.35) с порядком  $O(h)$ .

Окончательно разностная схема, аппроксимирующая граничную задачу (7.31), (7.32), (7.35) с погрешностью порядка  $O(h + l^2)$ , имеет вид

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (7.42)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} - \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}, \quad m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \\ u_{m0}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ \frac{u_{m1} - u_{m0}}{l}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ \tau_{1n} \frac{u_{1n} - u_{0n}}{h} + \tau_{2n} u_{0n}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ \delta_{1n} \frac{u_{Mn} - u_{M-1,n}}{h} + \delta_{2n} u_{Mn}, \quad n = 0, 1, \dots, N \end{array} \right.,$$

$$f^{(h)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} f(x_m, y_n), \quad m = 1, 2, \dots, M-1; \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ \varphi(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ \psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(u_{m0}) - \frac{l}{2} f(x_m, 0), \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ \omega_{1n}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ \omega_{2n}, \quad n = 0, 1, \dots, N \end{array} \right.$$

Если  $\tau_1(y) = \delta_1(y) = 0$  и  $\tau_2(y) = \delta_2(y) = 1$ , то разностная схема (7.42) аппроксимирует граничную задачу (7.31), (7.32), (7.35) с погрешностью порядка  $O(h^2 + l^2)$ .

Численная реализация разностной схемы (7.42) осуществляется следующим образом. Вначале, используя формулы

$$u_{m0} = \varphi(x_m),$$

$$u_{m1} = \varphi(x_m) + l[\psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(\varphi(x_m)) - \frac{l}{2} f(x_m, 0)], \quad m = 0, \pm 1, \dots, M,$$

вычисляем значения на нулевом и первом слоях  $u_{m0}$  и  $u_{m1}$ . Затем по уравнению

$$u_{m,n+1} = 2u_{mn} + l^2 \Lambda_{xx}(u_{mn}) - u_{m,n-1} - l^2 f(x_m, y_n)]$$

при  $n = 1$  определяются значения  $u_{12}, u_{22}, \dots, u_{M-1,2}$ . Для вычисления значений  $u_{02}$  и  $u_{M2}$  используются разностные граничные условия при  $n = 2$  вида

$$u_{02} = \frac{\tau_{12}}{\tau_{12} - h\tau_{22}} u_{12} - \frac{h\omega_{12}}{\tau_{12} - h\tau_{22}},$$

$$u_{M2} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{12} + h\delta_{22}} u_{M-1,2} - \frac{h\omega_{22}}{\delta_{12} + h\delta_{22}},$$

причем  $\tau_{12} - h\tau_{22} \neq 0$  и  $\delta_{12} + h\delta_{22} \neq 0$ .

Аналогично, по значениям  $u_{m1}, u_{m2}$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ), вычисляются значения  $u_{m3}$  и т. д.

**Метод прямых для уравнения колебания струны.** Метод прямых можно рассматривать как предельный случай метода сеток, когда при применении прямоугольной сетки один из линейных размеров её стремится к нулю, а множество узлов в пределе заполняет некоторую систему прямолинейных параллельных отрезков. Идею этого метода перенесём на дифференциальное уравнение гиперболического типа.

Если коэффициенты общего уравнения гиперболического типа

$$Lu = a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u = f(x, y)$$

зависят от  $x$ , то метод прямых лучше не применять, а воспользоваться обычным методом сеток.

Рассмотрим метод прямых приближенного решения простейшего уравнения колебаний струны (7.31), в области  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t < \infty$  при следующих начальных и граничных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_2(x),$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t). \quad (7.43)$$

Проведем систему параллельных прямых

$$x = x_k = kh \quad (k = 0, 1, \dots, n+1; \quad h = \frac{l}{n+1})$$

и обозначим через  $u_k(x)$  значения точного решения  $u(x, t)$  задачи (7.31), (7.43) на прямой  $x = x_k$ , т. е.  $u_k(x) = u(x_k, t)$ . Если  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \big|_{x=x_k}$  заменить разностным отношением

$$\frac{u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t))}{h^2},$$

то получим следующую систему уравнений **метода прямых**, заменяя  $u_k(t)$  на  $U_k(t)$

$$\begin{cases} U_k''(t) - \frac{U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)}{h^2} = f_k(t), & k = 1, 2, \dots, n \\ U_0(t) = \psi_1(t), \quad U_{n+1}(t) = \psi_2(t) \end{cases} \quad (7.44)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} U_k(0) = \varphi_1(x_k) = \varphi_{1,k} \\ U_k'(0) = \varphi_2(x_k) = \varphi_{2,k} \end{cases}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7.45)$$

аппроксимирующую уравнение (7.31) с точностью до  $h^2$ .

Чтобы получить систему уравнений метода прямых, более точно аппроксимирующую уравнение (7.31), воспользуемся равенством, из разложения  $u(x, y)$  в окрестности точки  $x_k$  в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t) &= \\ &= \frac{5h^2}{6} \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^2 u(x_{k+1}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_{k-1}, t)}{\partial x^2} \right] + O(h^6). \end{aligned} \quad (7.46)$$

Из дифференциального уравнения (7.31) получим

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial t^2} - f(x_k, t) = u_k''(t) - f_k(t).$$

Тогда соотношение (7.46) после подстановки значений вместо производных  $\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u(x_{k+1}, t)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u(x_{k-1}, t)}{\partial x^2}$  дает

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} u_k''(t) + \frac{1}{12} [u_{k+1}''(t) + u_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)] &= \\ = \frac{5}{6} f_k(t) + \frac{1}{12} [f_{k+1}(t) + f_{k-1}(t)] + O(h^4) \end{aligned}$$

Отбрасывая член  $O(h^4)$  и заменяя при этом  $u_k(t)$  на  $U_k(t)$ , получим следующую систему уравнений метода прямых:

$$\begin{cases} \frac{5}{6}U_k''(t) + \frac{1}{12}[U_{k+1}''(t) + U_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2}[U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] = \\ = \frac{5}{6}f_k(t) + \frac{1}{12}[f_{k+1}(t) + f_{k-1}(t)], \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ U_0(t) = \psi_1(t), \quad U_{n+1}(t) = \psi_2(t) \end{cases} \quad (7.47)$$

с начальными условиями

$$U_k(0) = \varphi_1(x_k) = \varphi_{1k}, \quad U_k'(0) = \varphi_2(x_k) = \varphi_{2k}. \quad (7.48)$$

Эта система дает аппроксимацию порядка  $h^4$ .

Общее решение однородных систем, соответствующих системам дифференциальных уравнений метода прямых (7.44) и (7.47), несложно построить [8].

Сходимость решений, полученных методом прямых, к обобщенному решению задачи (7.31), (7.43) имеет место в любом прямоугольнике  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ , если начальные и граничные условия нулевые, а функция  $f(x, t)$  ограничена некоторой положительной константой. Общий случай начальных и граничных условий сводится к этому случаю при выполнении некоторых требований для функций  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ .



### Лекция 33. Метод сеток решения линейных дифференциальных уравнений параболического типа (4ч. – 2ч. ЛК+4ч. ЛР)

1. Постановка задачи, основные определения.
2. Метод сеток для решения задачи Коши.
3. Метод сеток для решения смешанной задачи. Понятие устойчивости разностных схем.
4. Метод прогонки при решении уравнения теплопроводности.

**Решение задачи Коши.** Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (7.51)$$

с условием в начальный момент времени (на прямой)  $t=0$  задано распределение температуры

$$u(x, 0) = \psi(x). \quad (7.52)$$

Здесь  $u = u(x, t)$  – температура и  $t$  – время.

Необходимо найти функцию  $u = u(x, t)$  (распределение температуры) удовлетворяющую (7.51) – (7.52). Будем считать, что задача (7.51) – (7.52) имеет в верхней полуплоскости единственное решение  $u(x, t)$ , непрерывное вместе со своими производными  $u_t^{(j)}$ ,  $j=1,2$  и  $u_x^{(k)}$ ,  $k=1,2,3,4$ . Запишем задачу (7.51) – (7.52) в виде

$$Lu = f, \quad (7.53)$$

где

$$Lu = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) \end{cases}, \quad f = \begin{cases} \varphi(x, t) \\ \psi(x) \end{cases}.$$

Будем считать, что  $t \in [0, T]$ .

Выберем прямоугольную сетку и заменим область  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  сеточной областью

$$\Omega_h : \left\{ x_m = mh, \quad t_n = n\tau; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, \left[ \frac{T}{\tau} \right], \quad h > 0, \tau > 0 \right\}.$$

Заменим задачу (7.53) разностной схемой  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ . Обозначим через  $[u]_{x_m, t_n} = u(x_m, t_n)$  точное значение решения задачи (7.53) в узле  $(x_m, t_n)$ , через  $u_m^n$  – соответственно приближенное сеточное значение. Имеем

$$L[u]_h = \begin{cases} u'_t|_{(x_m, t_n)} - u''_{xx}|_{(x_m, t_n)} \\ u(x_m, 0) \end{cases}, \quad f|_{(x_m, t_n)} = \begin{cases} \varphi(x_m, t_n) \\ \psi(x_m) \end{cases}.$$

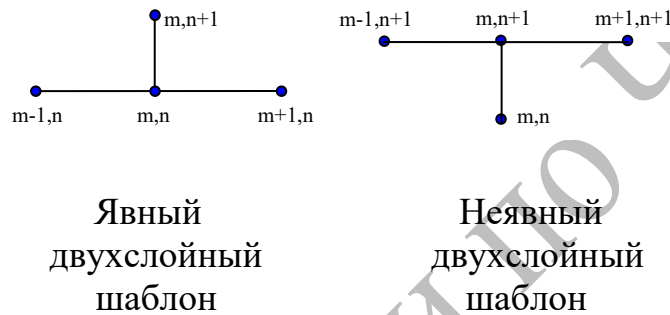
Для замены выражений  $u'_t|_{(x_m, t_n)}$  и  $u''_{xx}|_{(x_m, t_n)}$  разностными отношениями воспользуемся формулами численного дифференцирования

$$\begin{aligned}\frac{df(z)}{dz} &= \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \left[ \frac{\Delta z}{2} f''(z) + O(\Delta z) \right], \\ \frac{df(z)}{dz} &= \frac{f(z) - f(z-\Delta z)}{\Delta z} - \left[ -\frac{\Delta z}{2} f''(z) + O(\Delta z) \right], \\ \frac{df(z)}{dz} &= \frac{f(z+\Delta z) - f(z-\Delta z)}{2\Delta z} - \left[ \frac{(\Delta z)^2}{3!} f'''(z) + O(\Delta z)^2 \right].\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}u'_t|_{(x_m, t_n)} &= \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\tau} - \frac{\tau}{2} u''_{tt}|_{(x_m, t_n)}, \\ u''_{xx}|_{(x_m, t_n)} &= \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n))}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}_{xxxx}|_{(x_m, t_n)}.\end{aligned}$$

Приведем наиболее употребляемые для параболических уравнений шаблоны:



Рассмотрим явный двухслойный шаблон. Тогда

$$L[u]_h = \begin{cases} \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\tau} - \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n))}{h^2} + r_{mn}(h) \\ u(x_m, 0) \end{cases}$$

где

$$r_{mn}(h) = -\frac{\tau}{2} u''_{tt}|_{(x_m, t_n)} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}_{x^4}|_{(x_m, t_n)}.$$

Обозначая  $f^{(h)} = \begin{cases} \varphi(x_m, t_n) \\ \psi(x_m) \end{cases}$ , имеем следующую разностную схему

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (7.54)$$

где

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ u_m^0, & n = 0, 1, \dots, \left[ \frac{T}{\tau} \right] = N \end{cases}. \quad (7.55)$$

Если же воспользоваться неявной разностной схемой, то оператор  $L_h$  примет вид

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ u_m^0, & n = 0, 1, \dots, \left[ \frac{T}{\tau} \right] = N \end{cases}. \quad (7.56)$$

Учитывая вышеизложенное, можно записать

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)},$$

$$\text{где } \delta f^{(h)} = \begin{cases} r_{mn}(h) \\ 0 \end{cases}.$$

Для вычислений проще всего первая схема, так как из начальных условий известны значения решения в узлах начального ряда, по ним легко находятся значения решения в узлах первого ряда, затем второго ряда и т.д. (см. рисунок явной схемы). При использовании второй схемы приходится решать систему уравнений.

**О порядке аппроксимации разностных схем.** Выясним порядок аппроксимации разностных схем (7.54) – (7.55) и (7.54) – (7.56). В качестве пространства правых частей  $F_h$  возьмем линейное множество всех пар ограниченных функций  $g^{(h)} = \begin{Bmatrix} \alpha_m^n \\ \beta_m \end{Bmatrix}$ . Норму в пространстве  $F_h$  определим по правилу

$$\|g^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |\alpha_m^n| + \max_m |\beta_m|.$$

Заметим, что если  $\max$  не достигается, то вместо него будем брать  $\sup$ .

Пусть  $\tau = rh^s$  где  $r, s$  – некоторые положительные числа. Предположим, что имеют место оценки

$$\max_{\Omega} |u''| \leq M_1, \quad \max_{\Omega} |u^{(4)}| \leq M_2.$$

Тогда имеем

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |r_{m,n}(h)| \leq \left( \frac{r}{2} M_1 + \frac{h^{2-s}}{12} M_2 \right) h^s. \quad (7.57)$$

Для параболических уравнений в случае схемы (7.54) – (7.55) можно взять  $s=2$ , а в случае схемы (7.54) – (7.56) –  $s=1$ .

Таким образом, из (7.57) следует, что разностные схемы (7.54) – (7.55) и (7.54) – (7.56) аппроксимируют задачу (7.53) на решении  $u(x, t)$  с погрешностью порядка  $O(\tau + h^2)$ .

Разностная схема (7.54) – (7.55) позволяет по значениям решения на нулевом слое  $u_m^0$  вычислять значения на первом слое  $u_m^1$ . Потом по значениям  $u_m^1$  вычисляются значения  $u_m^2$  и т.д. В силу таких вычислительных свойств разностную схему (7.54) – (7.55) называют **явной**. Разностная схема (7.54) – (7.56) упомянутыми выше свойствами не обладает, так как для вычисления значения на первом слое  $...u_{-2}^1, u_{-1}^1, u_0^1, u_1^1, u_2^1, ...$  необходимо решать бесконечную систему линейных уравнений. По этой причине разностную схему (7.54) – (7.56) называют **неявной**.

**Об устойчивости двухслойных разностных схем.** Определим норму в пространстве функций  $U_h$  следующим образом

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_{m,n} |u_m^n|.$$

Рассмотрим явную разностную схему (7.54) – (7.55). Выясним, при каких значениях  $r$ ,  $\tau = rh^2$ , возможна устойчивость рассматриваемой схемы.

Для доказательства устойчивости надо показать, что разностная схема однозначно разрешима и при любых  $g^{(h)} = \begin{cases} \alpha_m^n \\ \beta_m \end{cases}$ ,  $g^{(h)} \in F_h$  имеет место оценка

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} \leq M \|g^{(h)}\|_{F_h},$$

где  $M$  – постоянная не зависящая от  $h$  и  $g^{(h)}$  и

$$L_h z^{(h)} = g^{(h)}. \quad (7.58)$$

Так как разностная схема (7.54) – (7.55) явная, то ее однозначная разрешимость очевидна (см. явный шаблон). Перепишем (7.58) в виде

$$z_m^{n+1} = r(z_{m+1}^n + z_{m-1}^n) + (1-2r)z_m^n + \tau \alpha_m^n, \quad z_m^0 = \beta_m. \quad (7.59)$$

Пусть выполнено условие  $1-2r \geq 0$  или

$$r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (7.60)$$

Тогда из (7.59) имеем

$$\max_m |z_m^{n+1}| \leq r(\max_m |z_m^n| + \max_m |z_m^n|) + (1-2r) \max_m |z_m^n| + \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|$$

или

$$\max_m |z_m^{n+1}| \leq \max_m |z_m^n| + \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|. \quad (7.61)$$

Из (7.61) следует, что при  $\alpha_m^n = 0$   $\max_m |z_m^{n+1}|$  не превосходит  $\max_m |z_m^n|$ , т.е.  $\max_m |z_m^n|$  не возрастает с ростом  $n$ . Это свойство однородной разностной схемы (7.54) называют **принципом максимума**. Как и ранее, пусть  $n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right] - 1$ ,  $N = \left[\frac{T}{\tau}\right]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \max_m |z_m^N| &\leq \max_m |z_m^{N-1}| + \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|, \\ &\dots \dots \dots \\ \max_m |z_m^1| &\leq \max_m |z_m^0| + \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|. \end{aligned}$$

Просуммировав эти неравенства, получим

$$\begin{aligned} \max_m |z_m^N| &\leq \max_m |\beta_m| + N\tau \max_{m,n} |\alpha_m^n| \leq \max_m |\beta_m| + T \max_{m,n} |\alpha_m^n| \leq \\ &\leq \max[1, T](\max_m |\beta_m| + N\tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|) = M \|g^{(h)}\|_{F_h}. \end{aligned}$$

Так как это неравенство верно для любого  $n$ , то имеем

$$\max_{m,n} |z_m^n| \leq M \|g^{(h)}\|_{F_h} \quad \text{или} \quad \|z^{(h)}\|_{U_h} \leq M \|g^{(h)}\|_{F_h}.$$

Явная разностная схема (7.54) – (7.55) при выполнении условия

$$r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (7.62)$$

устойчива. Условие (7.62) налагает жесткие ограничения на выбор  $\tau$ . Это приводит к тому, что если мы хотим сохранить устойчивость, то при

вычислениях по схеме (7.54) – (7.55) шаг  $\tau$  приходится брать достаточно малым.

**Замечание.** Для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad a(x, t) > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

достаточное условие (7.62) примет вид

$$r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2 \max_{(x, t) \in \Omega} |a(x, t)|}.$$

Пусть теперь оператор  $L_h$  задает неявную разностную схему (7.56). Тогда перепишем разностную схему (7.54) – (7.56) в следующем виде

$$-r(u_{m+1}^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + (1 + 2r)u_m^{n+1} = u_m^n + \tau \varphi(x_m, t_n), \quad u_m^0 = \psi(x_m).$$

Это есть бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\dots, u_{-2}^{n+1}, u_{-1}^{n+1}, u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots (n = 0, 1, \dots, N)$ . Решение таких систем является сложной и трудоемкой задачей. Поэтому разностные схемы (7.54) – (7.56) неудобны для задач Коши на бесконечных отрезках. Однако, если отрезок оси  $x$  конечен, т.е.  $a \leq x \leq b$ , а на границах  $x = a$  и  $x = b$  заданы некоторые ограничения на решение  $u(x, t)$ , то разностные схемы вида (7.54) – (7.56) оказываются весьма эффективными. В частности, как будет показано ниже, такие схемы являются абсолютно устойчивыми, т.е. устойчивы при любом  $r = \frac{\tau}{h^2} > 0$ . В этом случае указанную систему можно решать, например, методом прогонки.

Отметим, что из аппроксимации  $O(\tau + h^2)$  и устойчивости разностной схемы (7.54) – (7.55) следует ее сходимость.

**Наилучшая расчетная формула.** Получим наилучшую расчетную формулу для явной разностной схемы (7.54) – (7.55). Запишем оператор  $L_h[u]_h$  в разложениях соответствующих функций в ряды Тейлора в окрестности точки  $(x_m, t_n)$ , учитывая, что  $\tau = rh^2$ :

$$\begin{aligned} L_h[u]_h = & \left\{ \frac{1}{r} \left[ u|_{m,n} + u'_t|_{m,n} rh^2 + \frac{(rh^2)^2}{2!} u''_{tt}|_{m,n} + \frac{(rh^2)^3}{3!} u'''_{ttt}|_{m,n} - u|_{m,n} \right] - \right. \\ & - \left[ u|_{m,n} + hu'_x|_{m,n} + \frac{h^2}{2!} u''_{xx}|_{m,n} + \frac{h^3}{3!} u'''_{xxx}|_{m,n} + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}_{xxxx}|_{m,n} - 2u|_{m,n} + \right. \\ & \left. \left. + u|_{m,n} - hu'_x|_{m,n} + \frac{h^2}{2!} u''_{xx}|_{m,n} - \frac{h^3}{3!} u'''_{xxx}|_{m,n} + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}_{xxxx}|_{m,n} \right] \right\} \frac{1}{h^2} + O(h^4). \end{aligned}$$

После приведения подобных членов будем иметь

$$L_h[u]_h = (u'_t - u''_{xx})|_{m,n} + h^2 \left( \frac{r}{2} u''_{tt} - \frac{1}{12} u^{(4)}_{xxxx} \right)|_{m,n} + O(h^4). \quad (7.63)$$

Так как  $u(x, t)$  является решением однородной задачи  $u'_t = u''_{xx}$ , то  $u''_{tt} = u^{(4)}_{xxxx}$ . Подставляя эти равенства в (7.63) (т.е. заменяем в (7.63) частные производные по  $t$  равными им частными производными по  $x$ ) получаем

$$L_h[u]_h = h^2 \left( \frac{r}{2} - \frac{1}{12} \right) u^{(4)}_{xxxx} + O(h^4).$$

Выберем  $r$  так, чтобы  $\frac{r}{2} - \frac{1}{12} = 0$ . Отсюда следует, что  $r = \frac{1}{6}$ . При этом погрешность будет  $O(h^4)$ , в то время как для других  $r \leq \frac{1}{2} - O(h^2)$ . В этом смысле значение  $r = \frac{1}{6}$  является для расчетной схемы (7.54) – (7.55) наилучшим. Соответствующая наилучшая расчетная формула при таком выборе  $r$  имеет вид

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{6} (u_{m-1}^n + 4u_m^n + u_{m+1}^n).$$

### Лекция 34. Сходимость и устойчивость разностных схем (2ч. ЛК)

1. Разностная аппроксимация дифференциального уравнения и граничных условий.
2. Понятие корректности и устойчивости разностной схемы.
3. Связь сходимости с корректностью разностной схемы. Общие замечания.

**О сходимости разностных схем.** Пусть требуется приближенно вычислить решение  $u$  некоторой краевой задачи

$$Lu = f, \quad (7.64)$$

поставленной в области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ .

Для решения поставленной задачи (7.64) следует выбрать дискретное множество точек  $\Omega_h$  (сетку), принадлежащее  $\Omega \cup \partial\Omega$ ; ввести линейное нормированное пространство  $U_h$  функций, определенных на сетке  $\Omega_h$ ; установить соответствие между решением  $u$  и функцией  $[u]_h \in U_h$ , которую будем считать искомой таблицей решения  $u$ . Для приближенного отыскания таблицы  $[u]_h$ , которую условились считать точным решением задачи (7.64), необходимо на основе задачи (7.64) составить систему разностных уравнений (разностную схему)

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \quad (7.65)$$

относительно функций  $u^{(h)}$  из  $U_h$ , чтобы имела место сходимость

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \rightarrow 0 \quad (7.66)$$

при  $h \rightarrow 0$ . Причем, в линейных пространствах  $U_h$  и  $F_h$  заранее должны быть введены соответственно сеточные нормы  $\|\cdot\|_{U_h}$  и  $\|\cdot\|_{F_h}$ , которые являются сеточными аналогами норм  $\|\cdot\|_U$  и  $\|\cdot\|_F$  в исходных пространствах  $U$  и  $F$ .

Если для решения разностной краевой задачи (7.65) выполнено неравенство

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leq Ch^k,$$

то говорят, что сходимость имеет порядок  $k$  относительно  $h$ .

Задачу построения сходящейся разностной схемы (7.65) разбивают на две подзадачи:

- 1) Построение разностной схемы, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу (7.64);
- 2) Проверка устойчивости разностной схемы (7.65).

**Аппроксимация разностных схем.** Пусть в пространстве  $F_h$  уже введена норма. Разностная задача (7.65) аппроксимирует задачу (7.64) на решении  $u$ , если в равенстве

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \mathcal{O}^{(h)}$$

невязка  $\delta f^{(h)}$ , возникающая при подстановке решения исходной дифференциальной задачи  $[u]_h$  в разностную краевую задачу (7.65), стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ :

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} = \|L_h[u]_h - f^{(h)}\|_{F_h} \rightarrow 0.$$

Если

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq Ch^k,$$

где  $C$  не зависит от  $h$ , то аппроксимация имеет порядок  $k$  относительно  $h$ .

**Пример 7.1.** Построим для следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x, t), & -\infty < x < \infty, 0 \leq t < T \\ u(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (7.67)$$

одну из аппроксимирующих ее разностных схем.

Задача (7.67) запишется в форме (7.64), если положить

$$Lu \equiv \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}, & -\infty < x < \infty, 0 \leq t < T \\ u(x, 0), & -\infty < x < \infty \end{cases}, \quad f = \begin{cases} \varphi(x, t), & -\infty < x < \infty, 0 \leq t < T \\ \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

В качестве сетки  $\Omega_h$  используем совокупность точек пересечения прямых

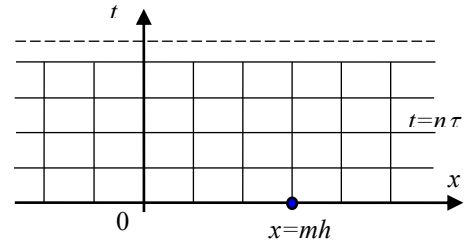
$$x = mh, \quad t = n\tau, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right],$$

где  $h > 0$ ,  $\tau > 0$  – некоторые числа.

Будем считать, что шаг  $\tau$  связан с шагом  $h$  зависимостью  $\tau = rh$ , где  $r = \text{const}$ , так что сетка  $\Omega_h$  зависит только от одного параметра  $h$ . Искомой сеточной функцией является таблица

$[u]_h = \{u(mh, n\tau)\}$  значений решения  $u(x, t)$  задачи

(7.67) в точках сетки  $\Omega_h$ .



**Построим аппроксимирующую задачу.** Значение сеточной функции  $u^{(h)}$  в точке  $(x_m, t_n) = (mh, n\tau)$  сетки  $\Omega_h$  обозначим через  $u_m^n$ . Схему (7.65) получим, приблизив производные  $u'_t$  и  $u'_x$  разностными отношениями

$$u'_t|_{x,t} \approx \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau}, \quad u'_x|_{x,t} \approx \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h},$$

где  $x = mh$ ,  $t = n\tau$ . Тогда схема (7.65) будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh), \quad m = 0, \pm 1, \dots; \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right] - 1 \end{cases}. \quad (7.68)$$



Оператор  $L_h$  и правая часть  $f^{(h)}$  для системы (7.68) определяются следующим образом:

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} \\ u_m^0 \end{cases}, \quad f^{(h)} = \begin{cases} \varphi(mh, n\tau), & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \psi(mh), & n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right] - 1 \end{cases}.$$

Разностное уравнение из системы (7.68) можно разрешить относительно  $u_m^{n+1}$ . Получаем

$$u_m^{n+1} = (1-r)u_m^n + ru_{m+1}^n + \tau\varphi(mh, n\tau), \quad \tau = rh. \quad (7.69)$$

Таким образом, зная значения  $u_m^n$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots$  решения  $u^{(h)}$  в точках сетки при  $t = n\tau$ , можно вычислить значения  $u_m^{n+1}$  в точках сетки  $t = (n+1)\tau$ . Напомним, что значения сеточной функции на первом слое заданы.

**Выясним порядок аппроксимации**, которым обладает разностная схема (7.68). В качестве пространства  $F_h$  возьмем линейное пространство всех пар ограниченных функций  $g^{(h)} = \begin{pmatrix} \varphi_m^n \\ \psi_m \end{pmatrix}$ , определив норму в нем следующим образом

$$\|g^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |\varphi_m^n| + \max_m |\psi_m|.$$

Предположим, что решение  $u(x, t)$  задачи (7.67) имеет ограниченные вторые производные. Тогда, применяя формулу Тейлора, получим

$$\begin{cases} \frac{u(x_m + h, t_n) - u(x_m, t_n)}{h} = \frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_m + \xi, t_n)}{\partial x^2} \\ \frac{u(x_m, t_n + \tau) - u(x_m, t_n)}{\tau} = \frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial t} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, t_n + \eta)}{\partial t^2} \end{cases}, \quad (7.70)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  – некоторые числа, зависящие от  $m, n$  и  $h$  и удовлетворяющие неравенствам  $0 < \xi < h$ ,  $0 < \eta < \tau$ .

С помощью формул (7.70) выражение

$$L_h[u]_h \equiv \begin{cases} \frac{u(x_m, t_n + \tau) - u(x_m, t_n)}{\tau} - \frac{u(x_m + h, t_n) - u(x_m, t_n)}{h} \\ u(x_m, 0) \end{cases},$$

можно переписать в виде

$$L_h[u]_h \equiv \begin{cases} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_m, t_n} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, t_n + \eta)}{\partial t^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_m + \xi, t_n)}{\partial x^2} \\ u(x_m, 0) + 0 \end{cases},$$

или

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \mathcal{J}^{(h)},$$

где

$$\mathcal{J}^{(h)} = \begin{cases} \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, t_n + \eta)}{\partial t^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_m + \xi, t_n)}{\partial x^2} \\ 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{J}^{(h)}\|_{F_h} \leq \left( \text{Sup} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \frac{r}{2} + \text{Sup} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \frac{1}{2} \right) h.$$

Таким образом, рассматриваемая разностная схема (7.68) имеет первый порядок аппроксимации относительно  $h$  на решении  $u(x,t)$ , обладающим ограниченными вторыми производными.

**Устойчивость разностных схем.** Разностная краевая задача (7.65) называется устойчивой, если существуют числа  $\delta > 0$  и  $h_0 > 0$  такие, что при любом  $h < h_0$  и любом  $\mathcal{J}^{(h)}$  из  $F_h$ , удовлетворяющим неравенству

$$\|\mathcal{J}^{(h)}\|_{F_h} \leq \delta,$$

следующая разностная краевая задача

$$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \mathcal{J}^{(h)}$$

имеет одно и только одно решение, причем выполняется условие

$$\|z^{(h)} - u^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|\mathcal{J}^{(h)}\|_{F_h},$$

где  $C$  – некоторая постоянная, не зависящая от  $h$ .

Определение устойчивости разностной схемы можно дать и следующим образом: Разностная краевая задача (7.65) устойчива, если существует  $h_0 > 0$  такое, что при  $h < h_0$  и любом  $f^{(h)} \in F_h$  она однозначно разрешима, причем

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|f^{(h)}\|_{F_h},$$

где  $C$  – некоторая постоянная, не зависящая от  $h$  и от  $f^{(h)}$ .

Свойство устойчивости разностной схемы можно трактовать, как равномерную относительно  $h$  зависимость решения разностной схемы от входных данных.

Связь аппроксимации и устойчивости разностной схемы со сходимостью определяется следующей теоремой:

**Теорема 7.2.** Пусть разностная схема  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$  аппроксимирует задачу  $Lu = f$  на решении  $u(x,y)$  с порядком  $s > 0$  относительно  $h$  и устойчива. Тогда эта схема будет сходящейся, и порядок ее сходимости будет совпадать с порядком аппроксимации, т.е. справедлива оценка

$$\|u_h(x,y) - u^{(h)}\|_{U_h} \leq Ch^s; \quad u_h(x,y) = [u]_h, \quad (7.71)$$

где  $C$  – постоянная, не зависящая от  $h$ .

**Замена производных разностными отношениями.** Простейший прием построения разностных краевых задач, аппроксимирующих дифференциальные задачи, состоит в замене производных соответствующими разностными отношениями. Для обыкновенных дифференциальных уравнений их можно записать следующим образом:

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \left[ \frac{\Delta z}{2} f''(z) + O(\Delta z) \right], \quad (7.72)$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{f(z) - f(z-\Delta z)}{\Delta z} - \left[ -\frac{\Delta z}{2} f''(z) + O(\Delta z) \right], \quad (7.73)$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z-\Delta z)}{2\Delta z} - \left[ \frac{(\Delta z)^2}{3!} f'''(z) + O(\Delta z)^2 \right], \quad (7.74)$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{f(z+\Delta z) - 2f(z) + f(z-\Delta z)}{\Delta z^2} - \left[ \frac{(\Delta z)^2}{12} f^{(4)}(z) + O(\Delta z)^2 \right], \quad (7.75)$$

где в квадратных скобках записаны остаточные члены этих формул. Указанные формулы могут быть получены из разложения функции в ряд Тейлора

$$f(z+\Delta z) = f(z) + \Delta z f'(z) + \frac{(\Delta z)^2}{2!} f''(z) + \frac{(\Delta z)^3}{3!} f'''(z) + O((\Delta z)^3),$$

$$f(z-\Delta z) = f(z) - \Delta z f'(z) + \frac{(\Delta z)^2}{2!} f''(z) - \frac{(\Delta z)^3}{3!} f'''(z) + O((\Delta z)^3).$$

Формулы (7.72) – (7.75) вместе с выражениями остаточных членов можно использовать и при замене частных производных разностными отношениями. Например,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} \left[ \frac{\Delta t}{2} u''_{tt}(x,t) + O(\Delta t) \right]$$

или

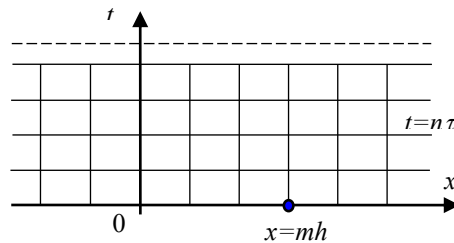
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x} \left[ \frac{\Delta x}{2} u''_{xx}(x,t) + O(\Delta x) \right].$$

### Простейшие разностные схемы

**Пример 7.2.** Рассмотрим ту же задачу Коши, что и раньше.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < T, \\ u(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (7.76)$$

Для аппроксимации этой дифференциальной задачи построим **три разностные схемы**. Во всех этих схемах используем сетку  $\Omega_h$ , образованную точками пересечения прямых  $x = mh$ ,  $t = n\tau$ , попавшими в полосу  $0 \leq t \leq T$ .



Будем считать также, что  $\tau = rh$ , где  $r$  – некоторая положительная постоянная.

**Простейшая** из разностных схем с использованием формулы (7.72), аппроксимирующих задачу (7.76) имеет вид

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}$$

или

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh) \end{cases}.$$

Для этой схемы невязка  $\mathcal{J}^{(h)}$ , возникающая при подстановке решения  $[u]_h$  дифференциальной задачи в левую часть разностной задачи

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \mathcal{J}^{(h)},$$

выражается формулой

$$\mathcal{J}^{(h)} = \begin{cases} \left( \frac{\tau}{2} u_{tt}'' - \frac{h}{2} u_{xx}'' \right)_{m,n} + O(\tau + h) \\ 0 \end{cases}.$$

Нормой элемента  $f^{(h)}$  пространства  $F_h$  будем считать максимум всех компонент элемента  $f^{(h)} \in F_h$ . Тогда

$$\|\mathcal{J}^{(h)}\|_{F_h} = O(\tau + h) = O(rh, h) = O(h),$$

т.е. получаем первый порядок аппроксимации.

**Вторая** разностная схема получается при использовании формулы (7.73) для замены  $u'_x$ :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h}.$$

После замены производных в (7.76) получим следующую разностную схему

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh) \end{cases}. \quad (7.77)$$

Здесь невязка имеет вид

$$\mathcal{J}^{(h)} = \begin{cases} \left( \frac{\tau}{2} u_{tt}'' + \frac{h}{2} u_{xx}'' \right)_{m,n} + O(\tau + h) \\ 0 \end{cases}$$

и  $\|\mathcal{J}^{(h)}\|_{F_h} = O(h)$ , т.е. снова порядок аппроксимации равен единице.

Вторая разностная схема незначительно отличается от первой. Однако она неустойчива при любом  $\frac{\tau}{h} = r = \text{const}$  и, следовательно, непригодна для счета.

**Третья** разностная схема

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh) \end{cases}$$

получается при замене производных разностными отношениями по следующим приближенным формулам

$$u'_t \approx \frac{u(x, t + \tau) - \frac{u(x+h, t) + u(x-h, t)}{2}}{\tau},$$

$$u'_{x \approx} \frac{u(x+h, t) + u(x, t)}{h}.$$

Используя ряд Тейлора для достаточно гладкого решения  $u(x, t)$  задачи (7.76) будем иметь

$$\frac{u(x, t + \tau) - \frac{u(x+h, t) + u(x-h, t)}{2}}{\tau} - \frac{u(x+h, t) + u(x, t)}{h} = \varphi(x, t) +$$

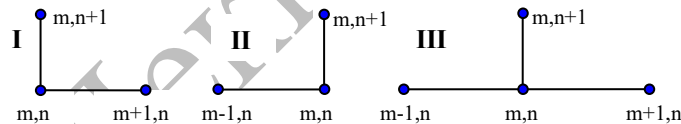
$$+ \left[ -\frac{h}{2r} u''_{xx} + \frac{\tau}{2} u''_{tt} + O(h^2) \right]_{x, t}.$$

Тогда невязка  $\mathcal{J}^{(h)}$  определяется следующим образом

$$\mathcal{J}^{(h)} = \begin{cases} \frac{\tau}{2} u''_{tt} - \frac{h}{2r} u''_{xx} + O(h^2) \\ 0 \end{cases}.$$

Откуда  $\|\mathcal{J}^{(h)}\|_{F_h} = O(h)$  т.е. разностная схема опять имеет первый порядок аппроксимации по  $h$ .

Для облегчения записи разностной схемы ее обычно принято сопоставлять с картинкой, на которой изображено взаимное расположение точек сетки (шаблон), значения решения в которых связывает разностное уравнение при некоторых фиксированных значениях  $m$  и  $n$ . Для приведенных трех схем эти шаблоны (явные) следующие



*Общие замечания* при использовании разностных схем:

1. Вначале указывается правило выбора сетки. Чаще всего сетка выбирается прямоугольной и равномерной.

2. Потом указывается и строится конкретно одна или несколько разностных схем. Проверяется условие аппроксимации разностных схем и устанавливается порядок аппроксимации.

3. Доказывается устойчивость построенных разностных схем. Это наиболее важный и сложный вопрос. Если разностные схемы обладают аппроксимацией и устойчивостью, то сходимость следует из приведенной выше теоремы.

4. Рассматривается вопрос численного решения разностных схем. В случае линейных разностных схем получаются системы линейных алгебраических уравнений, (возникающие в методе сеток), которые решаются специальными методами, которые учитывают особенности решаемых задач.